Illustration

# Lösungen zur Übung 4.2-2:

## Anwendung des 2. Fickschen Gesetzes

Zeige, dass der folgende Ausdruck die Lösung des Diffusionproblems: Eindiffusion von außen; "unendliche Quelle ist

$$n(x, t) \;=\; (n_{¥} \;-\; n_0)\cdot\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2(D\cdot t)^{1/2}}\right)\right) + n_0$$

- Der Ausdruck "*erf* " steht dabei für "**Errorfunction**" oder **Gaußsche Fehlerfunktion**; eine tabellierte Funktion mit folgender Definition:

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\cdot\int_0^x \exp - x'^{\,2}\;\cdot dx'$$

Erstmal definieren wir das Problem etwas schärfer und allgemeiner:

- Wir betrachten $n(x, t)$, d. h. wir werden das 2. Ficksche Gesetz benötigen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\cdot\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\right) = D\cdot\Delta n$$

- In $n_{¥}$ und $n_0$ "verstecken" sich die Randbedingungen. Offenbar (nachdenken!) ist ihre Bedeutung wie folgt:
  - $n_0 = n(x, t = 0)$; d.h. es beschreibt die örtlich konstante **As**-Grundkonzentration im **Si** zu Beginn der Diffuison (muss ja nicht unbedingt **= 0** sein).
  - $n_{¥} = n(x = , t)$; d.h. es beschreibt die **As**-Konzentration auf der Oberfläche zu allen Zeiten. Da es konstant ist, haben wir eine unerschöpfliche Quelle.
- Damit ist alles klar, die Lösung erhalten wir wie folgt:

## Lösungen

a) Diffusionsgleichung

zu zeigen sind zwei Bedingungen:
i) Die gegebene Gleichung $c(x,t)$ erfüllt die Diffusionsgleichung und
ii) die gegebenen Randbedingungen werden von $c(x,t)$ erfüllt.

zu i)

Hinweis I: $$\frac{d}{dz}\int_0^{g(z)} f(y)dy = f(g(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z)$$

mit $g(z) = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ und $f(y) = \exp(-y^2)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -(c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{x}{2\sqrt{D}}(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}})\right)$$
$$\frac{\partial c}{\partial x} = -(c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right)$$
$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = (c_\infty - c_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\frac{2x}{4Dt}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}(c_\infty - c_0)\exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \cdot \left[-\frac{x}{4\sqrt{D}t^{\frac{3}{2}}} - D\frac{-2x}{8D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= 0 \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

zu ii) Randbedingungen:

I: $c_0 = c(x, t=0)$

$$\begin{aligned}c(x,t=0) &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-y^2)dy\right) + c_o \qquad \text{- mit Hinweis II} \\ &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + c_0 \\ &= c_0 \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

II: $c_\infty = c(x=0, t)$

$$\begin{aligned}c(x=0,t) &= (c_\infty - c_0) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^0 \exp(-y^2)dy\right) + c_o \\ &= c_\infty \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$