Ableitung der Näherungsformel für die Ladungsträgerkonzentration

Illustration

- Die Ausgangsformeln sind

$$n_L = N_D \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\,(E_D - E_F)/kT}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\exp\frac{E_F}{kT} = \frac{n_L}{N^L_{eff}} \cdot \exp\frac{E_L}{kT} \quad \textbf{(2)}$$

- Wir müssen "nur" den Ausdruck für E_F in der **2.** Formel in die erste Formel einsetzen, und nach n_L auflösen - das ist alles.
  - Sowas kann man mehr oder weniger elegant machen. Da wir das Ergebnis kennen, und es nicht besonders einfach aussieht, können wir aber erwarten, dass es auch keinen besonders einfachen Weg dahin gibt.
- Als erstes formen wir **(1)** etwas um.

$$\begin{aligned} n_L &= N_D \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\,(E_D - E_F)/kT}\right) \\ &= N_D \cdot \left(\frac{1 + \exp\,(E_D - E_F)/kT - 1}{1 + \exp\,(E_D - E_F)/kT}\right) \\ &= N_D \cdot \left(\frac{\exp\,(E_D/kT)}{\exp\,(E_D/kT) + \exp\,(E_F/kT)}\right) \end{aligned}$$

  - Für $\exp(E_F/kT)$ setzen wir jetzt die **2.** Gleichung ein und erhalten

$$n_L = N_D \cdot \left(\frac{\exp\,(E_D/kT)}{\exp\,(E_D/kT) + (n_L/N^L_{eff}) \cdot \exp\,(E_L/kT)}\right)$$

- Jetzt müssen wir nach n_L auflösen, und das führt unweigerlich auf eine quadratische Gleichung.
  - Es könnte einfacher werden, wenn wir die Kehrwerte betrachten, wir haben

$$\frac{1}{n_L} = \frac{1}{N_D} \cdot \left(\frac{\exp\,(E_D/kT) + (n_L/N^L_{eff}) \cdot \exp\,(E_L/kT)}{\exp\,(E_D/kT)}\right)$$

$$\frac{1}{n_L} - \frac{n_L \cdot \exp\,(E_L/kT)}{N^L_{eff} \cdot N_D \cdot \exp\,(E_D/kT)} - \frac{1}{N_D} = 0$$

- Jetzt kommt ein möglicherweise "eleganter" Trick: Wenn wir das Ergebnis betrachten und mit der bekannten Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen vergleichen, erscheint es plausibel, dass man zunächst mal nicht n_L, sondern $\mathbf{1/n^2_L}$ berechnet, weil dann die Wurzel im Zähler auftauchen muss.
  - Wir dividieren also durch n_L, sortieren, und erhalten

$$\frac{1}{n^2_L} - \frac{1}{n_L \cdot N_D} - \frac{\exp(E_L/kT)}{N^L_{eff} \cdot N_D \cdot \exp(E_D/kT)} = 0$$

$$1 \cdot x^2 - \frac{1}{N_D} \cdot x - \frac{\exp(E_L - E_D)/kT}{N^L_{eff} \cdot N_D} = 0$$

Wir haben also **$1/n_L = x$** gesetzt, und könne jetzt die Lösungsformel für die quadratische Gleichung der Form **$ax^2 + bx + c$** verwenden. Sie lautet bekanntlich

$$x_{1,2} = \frac{-\ b \ \pm (b^2 - 4ac)^{½}}{2a}$$

Wir erhalten entsprechend

$$\frac{1}{n_L} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{N_D} \pm \left(\frac{1}{N^2_D} + \frac{4 \cdot \exp(E_L - E_D)/kT}{N^L_{eff} \cdot N_D} \right)^{1/2} \right)$$

Für n_L resultiert damit

$$n_L = \frac{2}{1/N_D \ \pm \ 1/N_D \cdot \left\{1 + 4 \cdot (N_D/N^L) \cdot \exp(E_L - E_D)/kT\right\}^{½}}$$

$$n_L = \frac{2N_D}{1 + \left(1 + \dfrac{4 \cdot N_D}{N^L_{eff}} \cdot \exp \dfrac{E_L - E_d}{kT}\right)^{1/2}}$$

q.e.d. Also im Prinzip ganz einfach. Und wer so was nicht auf Anhieb schafft - darauf kommt es nur sehr bedingt an. Wichtig ist, dass man das Prinzip versteht, die Lösung der Gleichungen findet sich dann schon. Und auch, warum vom "±" nur noch das "+" übrig bleibt.