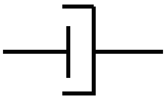
9.2.2 Der E - Modul und sein "Ersatzschaltbild"

- Das elastische Verhalten eines Polymers - inklusive der Anelastizität und Viskoelastizität - läßt sich modellmäßig sehr einfach durch eine Art **mechanisches "Ersatzschaltbild"** beschreiben.
  - Alles was wir brauchen ist eine *ideale Feder*: 

    und einen "**Stoßdämpfer**": 

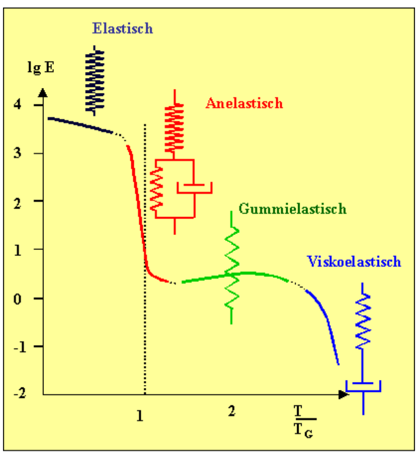
- Wir beschreiben diese Elemente durch ihre Bewegungsgleichungen.
  - Die Feder enthält den **E** *-Modul* des Materials und beschreibt den *perfekten elastischen* Teil der Verformung durch

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \cdot \sigma(t)$$

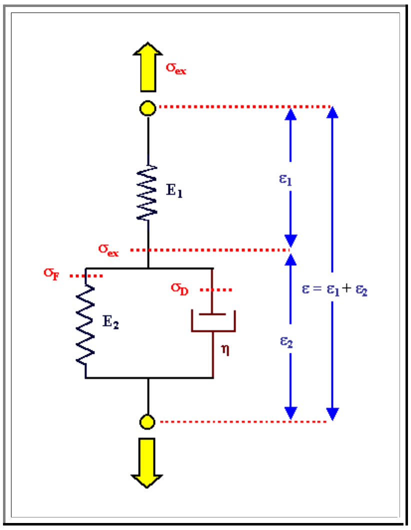
  - Ein Stoßdämpfer ist ein Element, das bei konstanter anliegender Spannung eine konstante Dehnungsgeschwindigkeit zeigt. Es gehorcht der Gleichung

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma(t)$$

  - Mit η = **Viskosität** des Materials; $[\eta] = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}$
- Das **visko-elastische Verhalten** der ***E***(***T***) Kurve kann dann mit folgenden Ersatzschaltbildern beschrieben werden:



- Wie sich so eine Kombination Feder - Stoßdämpfer bei Belastung verhält, haben wir alle im Gefühl. Es ergeben sich tatsächlich die elastischen, und insbesondere anelastischen und viskoelastischen $\epsilon(t)$ Kurven, die wir im vorhergehenden Unterkapitel beschrieben haben.
  - Aber wir müssen es nicht im Gefühl haben - wir können es jetzt auch rechnen. Betrachten wir zum Beispiel das folgende Ersatzschaltbild.



- Wir können die Gesamtdehnung ϵ als Summe der Einzeldehnungen ϵ_1 und ϵ_2 darstellen (wobei wir bei großen Dehnungen etwas aufpassen müssen).
- Freischneiden an den rot punktierten Stellen sagt uns, daß wir an Feder **2** die Spannung σ_F vorliegen haben; am Stoßdämpfer die Spannung σ_D. Beide zusammen entsprechen der externen Spannung σ_{ex} die auch an Feder **1** anliegt.
- Damit haben wir die Gleichungen

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\sigma_{ex} = \sigma_F + \sigma_D$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_{ex}}{E_1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_F}{E_2}$$

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{\sigma_D}{\eta}$$

- aus denen wir eine einfache Differentialgleichung für ϵ_2 erhalten:

$$\sigma_{ex} = \epsilon_2 \cdot E_2 + \eta \cdot \frac{d\epsilon_2}{dt}$$

Die Lösung mit der Anfangsbedingung $\epsilon_2(t = 0) = 0$ ist

$$\epsilon_2(t) = \frac{\sigma_{ex}}{E_2}\left(1 - \exp - \left(\frac{E_2}{\eta} \cdot t\right)\right)$$

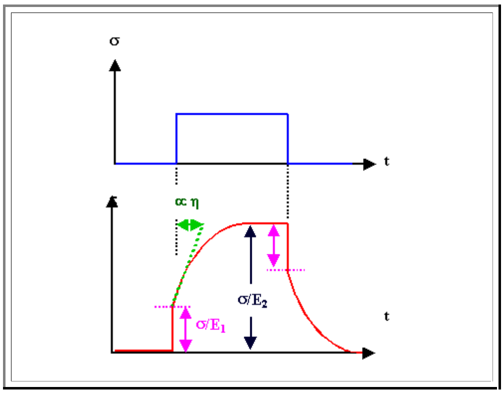
- Addieren wir noch $\epsilon_1 = \sigma_{ex}/E_1$, die instantan erfolgende Dehnung der "in Serie" geschalteten Feder, bekommen wir als Gesamtlösung:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_{ex}}{E_1} + \frac{\sigma_{ex}}{E_2}\left(1 - \exp - \left(\frac{E_2}{\eta} \cdot t\right)\right)$$

- Dazu machen wir eine Übung

Übung 9.2 -1
Rechnen mit mechanischem Ersatzschaltbild

Die durch diese Lösung beschrieben Funktion **ϵ(*t*)** für eine plötzlich ein- bzw. ausgeschaltete Spannung σ sieht so aus



- Wir haben die Anelastizität modelliert.

Mit einem geeignetem Ersatzschaltbild können wir so ziemlich jede viskoelastische und anelastische Dehnung beschreiben, vorausgesetzt wir wählen die geeigneten Parameter E_i und η_i für die erforderlichen Federn und Stoßdämpfer.

- E_i und η_i sind natürlich stark von der Temperatur und der Konformation abhängig.
- Wir müssen uns jetzt fragen: Was bedingt die ***E*** und η der Elemente des Ersatzschaltbilds? Was sind die mikroskopischem Mechanismen der Anelastitzität, der Viskoelastizität, der Gummielastizität und so fort?
- Damit werden wir uns im nächsten Unterkapitel beschäftigen.