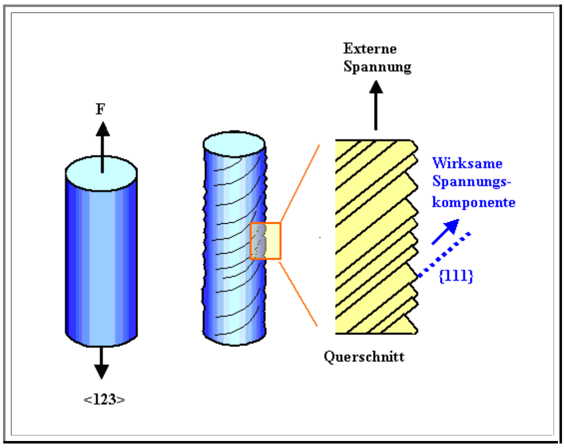
7.1.2 Normal- und Scherspannungen

Zugversuch am Einkristall und Motivation für vektorielle Betrachtung

- Bei üblichen Verformungsexperimenten mit *polykristallinen* (d.h. makroskopisch homogenen) technischen Materialien kann man davon ausgehen, daß das Material *isotrop* ist und sich im Zugversuch radialsymmetrisch verformt -es wird an einer gegebenen Stelle gleichmäßig dünner; der Querschnitt bleibt kreisförmig.
    - Obwohl Einkristalle in der *mechanisch*-technischen Welt *fast* nicht vorkommen (die Ausnahme sind einkristalline Turbinenschaufeln auf **Ni** Basis), ist der Zugversuch an Einkristallen besonders wichtig für das Verständnis der im Material ablaufenden Prozesse während einer Verformung.
    - Wir machen deshalb jetzt (in Gedanken) einen Zugversuch mit einem **fcc** Einkristall; wobei wir nicht in eine der hochsymmetrischen (d.h. "niedrig indizierten") Richtungen ziehen, sondern z.B. in die **<123>** Richtung. Das Spannungs-Dehnungsdiagramm wird uns später begegnen, hier ist nur wichtig, daß wir etwas *sehr Merkwürdiges* beobachten werden.
- Der Kristall wird zwar länger (und etwas dünner), aber der Querschnitt wird *elliptisch* und die (vorher polierte) Oberfläche wird "schuppig" oder treppenförmig. Das Ganze sieht etwa so aus:

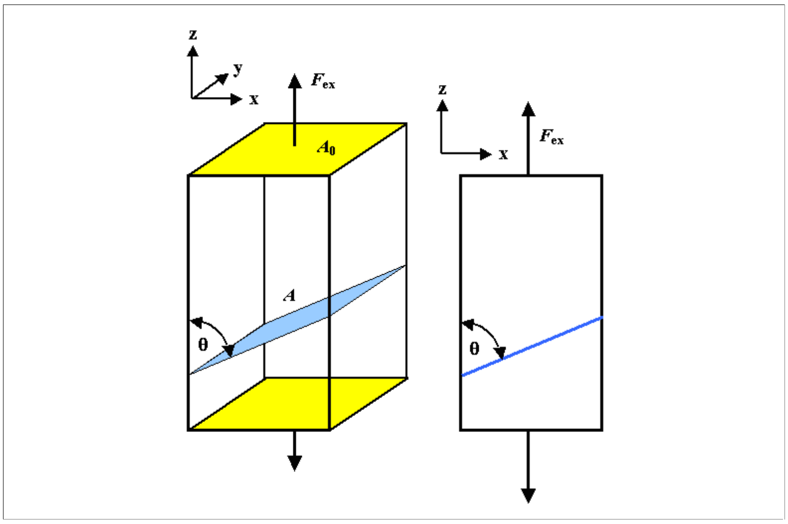


- Falls wir einen Querschnitt genau betrachten, sehen wir an der Außenseite eine Art Treppenmuster; mit Stufenhöhen im **nm** bis **µm** Bereich.
- Das ganze sieht mikroskopisch so aus, als ob der Kristall entlang einer **{111}** Ebene in lauter kleine Scheiben unterschiedlicher Dicke zerlegt wurde, die dann entlang von **Gleitebenen** etwas gegeneinander verschoben wurden.
- Diese Gleitebenen sind im schematischen Ausschnitt schwarz eingezeichnet dargestellt; in einem **fcc** Kristall werden wir, wie angedeutet, als Gleitebenen immer **{111}** Ebenen finden
- Ist das eigentlich wirklich merkwürdig? Was hätten wir denn erwartet? Wie soll der Einkristall auf Zugspannungen reagieren?

- Eine nicht einfache Frage; wir werden auf sie zurückkommen. Zunächst jedoch nehmen wir das Experiment nur zum Anlaß um uns klar zu machen, daß Kräfte, die nur in *eine* Richtung wirken, *nicht* ausreichen, um den Zugversuch hinreichend zu beschreiben.
    - Offensichtlich verschieben sich die Kristallebenen relativ zueinander in Richtungen, die *schräg* zur Zugrichtung stehen. Von der wirkenden Kraft oder besser *Spannung*, die wir von außen anlegen, wird letztlich nur die Komponente wirksam, die in der *Gleitebene* liegt auf der die Kristallblöcke aufeinander abzurutschen scheinen.
    - Wir müssen also zunächst den Zugversuch *vektoriell* betrachten und uns die formale Beschreibung der möglichen *Spannungszustände* im Material erarbeiten.

Normal- und Scherspannungen

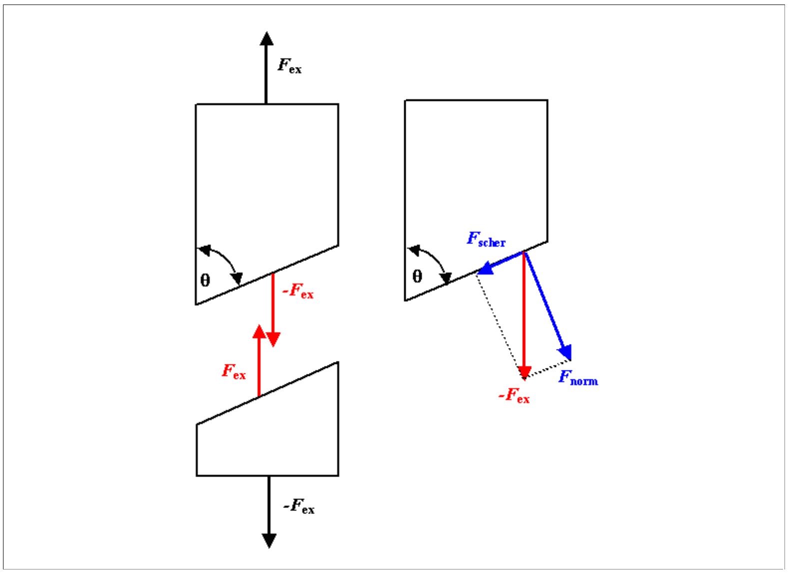
- Was wir tun müssen ist:
    - Eine (zur Zugrichtung) beliebig orientierte Fläche **A** herausgreifen.
    - Die extern wirkende Kraft $\boldsymbol{F}_{ex} = \sigma_{ex} \cdot \boldsymbol{A}_0$ vektoriell zerlegen: In eine Kraft $\boldsymbol{F}_{norm}$ die *senkrecht* auf der Fläche **A** steht und eine Kraft $\boldsymbol{F}_{scher}$ die *in* **A** liegt.
    - Die beiden Teilkräfte dividiert durch die Fläche ergeben dann die sogenannte **Normalspannung** und die **Scherspannung** in der Fläche **A**
- Wir führen dieses Programm mal aus für den noch vereinfachten Fall, daß die Ebene **A** nur "schräg" bezüglich *einer* Koordinatenachse liegt. Dann genügt *ein* Winkel Θ um die Geometrie zu beschreiben. Dies ist unten dargestellt.



- Einfache Trigonometrie liefert die folgende Beziehung für die *Fläche* ***A*** der Ebene **A**

$$A = \frac{A_0}{\sin \Theta}$$

- Zur Ermittlung der Normal- und Scherspannungen in der Ebenen **A** bedienen wir uns nun eines sehr wichtigen allgemeinen Konzeptes, das in vielen Varianten in allen möglichen technischen Situationen immer wieder auftauchen wird: Wir "*schneiden*" die Ebene **A** gedanklich frei und lassen auf die beiden Teilstücke Kräfte derart wirken, daß sich *nichts ändert*, d.h. die **Freischneidung** ohne Folgen bleibt.
  - Das sieht dann so aus:



  - Links die Situation nach dem Freischneiden. Wir müssen offenbar die Kräfte F_{ex} und $-F_{ex}$ anbringen um zu verhindern, daß die Probe jetzt auseinander läuft.
  - Rechts ist die Vektorzerlegung von $-F_{ex}$ in die Normalkraft F_{norm} und die Scherkraft F_{scher} gezeigt.
- Für die beiden Kräfte gilt

$$F_{norm} = F_{ex} \cdot \sin \Theta$$

$$F_{scher} = F_{ex} \cdot \cos \Theta$$

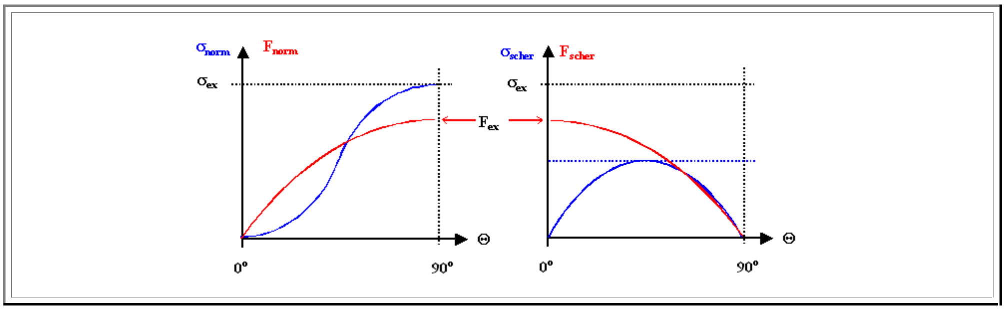
- Dividieren durch die Fläche $A = A_0/\sin \Theta$ der (noch etwas speziellen) Ebene **A** ergibt für die *Normal- und Scherspannung* in **A**

$$\sigma_{norm} = \frac{F_{norm}}{A} = \frac{F_{ex} \cdot \sin \Theta}{A_0/\sin \Theta} = \frac{F_{ex} \cdot \sin^2 \Theta}{A_0} = \sigma_{ex} \cdot \sin^2 \Theta$$

$$\sigma_{scher} = \frac{F_{scher}}{A} = \frac{F_{ex} \cdot \cos \Theta}{A_0/\sin \Theta} = \frac{F_{ex} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta}{A_0} = \frac{F_{ex} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\Theta}{A_0} = \frac{\sigma_{ex}}{2} \cdot \sin 2\Theta$$

  - Für eine beliebige Ebene, die dann durch *zwei* Winkel charakterisiert werden muß, erhalten wir etwas längere, aber immer noch einfach ableitbare Beziehungen. Dies wird in einem eigenen Modul ausgeführt, da uns hier die mit den obigen Formeln ableitbaren Schlußfolgerungen genügen.

- Zunächst machen wir uns klar, daß zwischen *Spannungen* und *Kräften* jetzt ein *fundamentaler Unterschied* besteht; sie sind nicht mehr Synonyme für im wesentlichen dieselbe Situation, d.h. nur durch einen konstanten Faktor unerschieden.
  - Dies wir am ehesten sichtbar, wenn wir die Spannungen und Kräfte als Funktion des Winkels Θ auftragen



  - Es ist unmittelbar ersichtlich, daß Spannungen und Kräfte jetzt *grundverschieden* sind. Für Θ ⇒ **90°** haben wir zum Beispiel $F_{scher} \Rightarrow$ **0**, weil $A \Rightarrow \infty$ strebt. Die Singularität **0/∞** ist jedoch "gutmütig" und ergibt schlicht **0**.
  - Die Scherspannungen laufen durch ein Maximum bei Θ **= 45°** und erreichen maximal *die Hälfte* der extern anliegenden Spannung σ_{ex}

- Scherspannungen und Normalspannungen verhalten sich also recht verschieden. Wir würdigen dies, indem wir ihnen verschiedene Abkürzungen geben:
  - *Normalspannungen* werden (wie bisher) mit σ abgekürzt, während wir für *Scherspannungen* ab sofort immer die Abkürzung τ verwenden.

- Das Konzept von Normalspannungen σ und Scherspannungen τ wird sehr weit tragen; es ist wichtig, sich damit vertraut zu machen.
  - Wir werden zum Beispiel noch sehen, daß für *plastische Verformung* die Scherspannungen verantwortlich sind, während der *Bruch* durch Normalspannungen verursacht wird - aber zunächst wenden wir unser erweitertes Spannungskonzept wieder auf rein *elastische* Verformungen an.