Kapitel 9: Ingenieurwissenschaft in Aktion: Differentialgleichungen

- Lösungsmethodik von Differentialgleichungen
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Die lineare Differentialgleichung n. Ordnung
- Einfache andere Differentialgleichungen
- Schwingungen

Nach Literatur: http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialgleichung

Eine Differential- bzw. Differenzialgleichung (oft abgekürzt mit DGL) ist eine Gleichung, die die Funktion selbst enthalten kann aber mindestens eine Ableitung enthält (y', y'' usw.). Es handelt sich also um eine Gleichung, deren Teile selbst Funktionen sind.

Eine Vielzahl von Phänomenen in Natur und Technik kann durch Differentialgleichungen und darauf aufbauende mathematische Modelle beschrieben werden. Einige typische Beispiele sind:

- In der Ingenieurwissenschaft verschiedene Arten von Bewegungen, von Schwingungen oder das Belastungsverhalten von Bauteilen,
- In der Physik die Quantenmechanik, Thermodynamik, Elektrodynamik und Mechanik
- in der Astronomie die Bahnen der Himmelskörper und die Turbulenzen im Innern der Sonne,
- in der Biologie etwa Prozesse bei Wachstum, bei Strömungen oder in Muskeln,
- in der Chemie die Reaktionskinetik von Reaktionen.

Um eine DGL zu lösen (in diesem Kontext spricht man auch von integrieren, bei der Lösung auch vom Integral), muss eine Funktion y gefunden werden, die mit ihren Ableitungen der Gleichung genügt. Die dazu notwendige Methodik ist für jeden Gleichungstyp verschieden (siehe Beispiele unten) und beschäftigt die Mathematiker seit dem 17. Jahrhundert. Auch die Eigenschaften dieser Lösung(en) hängen vom Gleichungstyp ab – z.B. die Frage, ob es Mehrdeutigkeiten gibt oder ob überhaupt eine Lösung existiert.

Als einfaches, lineares Beispiel möge die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

dienen. Die Suche nach der Funktion, welche die DGL erfüllt, kann nach einem Standardverfahren erfolgen und ergibt die allgemeine Lösung:

$$y = A \cos\{x\} + B \sin\{x\},$$

worin die Konstanten A, B aus den so genanten Randbedingungen folgen. Im allgemeinen enthält jede DGL solche Konstanten, die die mehrdeutigen Lösungsfunktionen eindeutig machen. Hier wird auch von einem Anfangswertproblem gesprochen.

Wenn eine längere DGL linear ist, wird sie in kürzere Gleichungen zerlegt und deren einzelne Lösungen addiert. Dieses Verfahren wird oft auch als Trennung der Variablen bzw. Trennung der Veränderlichen bezeichnet.

Nichtlineare Gleichungen können zwar nicht auf diese einfache Art zerlegt werden, doch findet man verschiedene Techniken in Formelsammlungen oder in mathematischen Computerprogrammen. Nicht jede Differentialgleichung hat eine analytische Lösung, gerade unter den nichtlinearen Differentialgleichungen findet man viele, die nicht integrabel sind.

Oft werden auch Lösungen zu einer vorgegebenen Differentialgleichung gesucht, die auf dem Rand des Definitionsbereiches bestimmte Funktionswerte annehmen sollen. Diese wichtige Klasse von Problemstellungen wird unter dem Begriff Randwertprobleme (RWP) oder Randwertaufgabe (RWA) behandelt.

Die Haupttypen von Differentialgleichungen sind:

1. **gewöhnliche Differentialgleichungen (engl. ordinary differential equations, ODEs): In der Gleichung tauchen nur Ableitungen nach einer Variablen auf**
2. partielle Differentialgleichungen (engl. partial differential equations, PDEs): In der Gleichung tauchen Ableitungen nach mehreren Variablen auf.
3. stochastische Differentialgleichungen (engl. stochastic differential equations, SDEs): Die Gleichung enthält mindestens einen stochastischen Prozess.
4. Seltener kommen die differentiell-algebraischen Gleichungen (engl. differential algebraic equations, DAEs) vor, bei denen zusätzlich zur Differentialgleichung noch rein algebraische Nebenbedingungen eingebracht werden.

Die in der Differentialgleichung gesuchte Funktion f kann von einer Variablen x oder mehreren ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ in Vektorschreibweise) abhängen. Im ersten Falle spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung, im letzteren Falle von einer partiellen Differentialgleichung. Hierbei ist implizit angenommen, dass Ableitungen nach allen vorkommenden Variablen auftreten; andernfalls spricht man von Parametern. Aus dem englischen kommend werden die Abkürzungen ODE (ordinary differential equation) und PDE (partial differential equation) für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen benutzt.

Die historisch ersten Differentialgleichungen waren die der gleichmäßigen und ungleichmäßig beschleunigten Bewegung. Im Jahr 1590 erkannte Galileo Galilei den Zusammenhang zwischen der Fallzeit eines Körpers und ihrer Fallgeschwindigkeit, sowie dem Fallweg, und formulierte mit noch geometrischen Mitteln das Gesetz des freien Falles.

Als Isaac Newton auch Bewegungen unter zum Betrag oder Quadrat der Geschwindigkeit proportionaler Reibung betrachtete, war er genötigt, den Differentialkalkül und den heute geläufigen Formalismus der Differentialgleichungen einzuführen.

Definition:
Eine algebraische Gleichung, welche Ableitungen nach einer einzelnen reellen Variablen enthält, wird als gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) bezeichnet. Ihre Ordnung n ist durch die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung gegeben.

Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dann heißt

$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ bzw. $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist immer eine Funktion (oder im Falle eines Systems von Differentialgleichungen mehrere Funktionen). Es ist jedoch nicht jede Differentialgleichung lösbar, es gibt allerdings einige Kriterien, anhand derer man Lösbarkeit erkennen kann. Ferner reicht die Differentialgleichung allein im Allgemeinen nicht aus, um die Funktion eindeutig zu bestimmen. Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung hat im Allgemeinen n freie Parameter. Die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung von n Unbekannten enthält im Allgemeinen eine frei wählbare (aber hinreichend oft differenzierbare) Funktion von n-1 Variablen, die selbst Funktionen der n Unbekannten sind (diese Funktionen sind aber natürlich nicht frei wählbar sondern werden durch die Lösung bestimmt).

Beispielsweise werden alle schwingenden Pendel durch eine Differentialgleichung beschrieben, und der generelle Bewegungsablauf folgt immer dem gleichen Prinzip. Der konkrete Bewegungsablauf ist jedoch durch die Rand- oder Anfangsbedingung(en) (wann wurde das Pendel angestoßen, und wie weit) bestimmt. Die Lösbarkeit von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung wird durch den Satz von Picard-Lindelöf beschrieben. Nur wenige Typen von Differentialgleichungen lassen sich analytisch lösen. Insbesondere partielle Differentialgleichungen können oft nur mit numerischen Methoden approximiert werden.

Die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung bildet ein dynamisches System, auch Fluss der Differentialgleichung genannt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lassen sich immer auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen:

Sei eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung gegeben. Dann werden folgende Hilfsfunktionen eingeführt:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\ldots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \end{aligned}$$

Wir erhalten dadurch ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Umgekehrt kann man auch aus manchen (aber nicht allen) Differentialgleichungssystemen eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung ableiten.

Lineare homogene Differentialgleichungen:

Für Lösungen y homogener linearer Differentialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip, was heißt, dass eine Linearkombination mehrerer Lösungen wieder eine Lösung ist. Die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt auf einem Intervall I genau n linear unabhängige Lösungen. Diese Lösungen bilden ein sogenanntes Fundamentalsystem:

$$y = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n \qquad \text{mit} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$$

Grundsätzlich gibt es kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung des Fundamentalsystems. Zum Auffinden der Lösungen ist es notwendig, spezielle Lösungsverfahren zu verwenden. Diese können die Differentialgleichung durch das sog. Reduktionsverfahren von D'Alembert auf eine solche niedrigerer Ordnung zurückführen.

Doch können allgemeine Aussagen über die Struktur des Lösungsraumes einer linearen homogenen Differentialgleichunge n-ter Ordnung gemacht werden. Das Fundamentalsystem umfasst genau dann alle Lösungen, wenn die Variationen von x des zugehörigen Anfangswertproblems (AWP) das ganze Intervall I abdecken.

Anfangswertproblems (AWP): $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Nach dieser mathematisch abstrakten Überlegung zur Lösbarkeit nun zur Lösung Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Im Gegensatz zu den vorhergehend beschriebenen allgemeinen linearen DGLn ist es bei solchen mit konstanten Koeffizienten möglich ein Fundamentalsystem der homogenen DGL aufgrund eines expliziten Lösungsverfahrens zu ermitteln. Bei einer inhomogenen DGL mit konstanten Koeffizienten führt die Methode der Variation der Konstanten oder später beschriebene spezielle Ansätze über Reihen schließlich wieder zu einer partikulären, und somit durch ihre Linearkombination mit der homogenen zu einer allgemeinen Lösung.

Bestimmung des Fundamentalsystems:
Sei eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten gegeben durch:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)}(x) = 0 \text{ bzw. } y' = Fy \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

Dann führt der Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit zunächst unbekanntem λ zum Ziel. Setzt man nun den Ansatz in die gegebene DGL ein, also $y(x) = e^{\lambda x}, y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \ldots$ und kürzt schließlich mit $e^{\lambda x}$ erhält man ein Polynom n-ten Grades (sog. charakteristisches Polynom), der Form: $\sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i = 0$ Bei dem sich λ bestimmen lässt. Eventuelle Vorfaktoren entstehen im AWP.

Beispiel (siehe oben): y'' + y = 0, bzw. $y + y'' = 0;$ also c_0=1, c_1=0, c_2=1 $\left(\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)}(x) = 0\right)$

Lösung, charakteristisches Polynom mit n Nullstellen:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i = 0; \quad 1 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

$$\text{Fundamentalsystem}: y = a_0 e^{ix} + a_1 e^{-ix}$$

Abhängig vom AWP können nun spezielle Lösungen angegeben werden.

Bisher wurden homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersucht. Inhomogene Differentialgleichungen sind von 0 verschieden. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen (diese wird mitunter auch Partikulärlösung genannt). Da es zu einer linearen DGL n-ter Ordnung aber nur n linear unabhängige Lösungen gibt, reicht es, eine spezielle Lösung zu kennen!

Lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)}(x) = b(x)$$

Sei nun $y_i(x)$ eine Lösung der homognenen DGL und y_P eine Lösung der Inhomogenen DGL. Dann ist also $y(x)=y_i(x)+y_P(x)$ auch eine Lösung (einsetzen).

Die Lösung der inhomogenen DGL kann in folgenden Fällen einfach gefunden werden:

- ist *b(x)* ein Polynom, so kann $y_P(x)$ auch als Polynom gleichen Grades gewählt werden
- ist $b(x) = Ke^{\lambda x}$ so kann $y_P(x)$ ähnlich gewählt werden (unterschiedliche Konstante)
- ist $b(x) = A\sin(k_1 x) + B\cos(k_2 x)$ so kann $y_P(x)$ ähnlich gewählt werden (unterschiedliche Konstanten)

Beispiel: $y''(x) - 4y(x) = 4x + 2$

Lösung der homogenen DGL: $y''(x) - 4y = 0 \qquad c_0 = -4; c_1 = 0; c_2 = 1$

Charakteristisches Polynom:

$$-4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -2;$$

Fundamentalsystem:

$$y(x) = a_1 e^{2x} + a_2 e^{-2x}$$

Partikuläre Lösung : Ansatz Typ I, Polynom gleichen Grades

$$y(x) = mx + t \;;\; y''(x) = 0$$

Einsetzen:

$$-4(mx + t) = 4x + 2$$

$$m = -1; t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_p(x) = -x - \frac{1}{2}$$

Lösung der inhomogenen DGL: $y(x) = a_1 e^{2x} + a_2 e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$

Einfache andere Differentialgleichungen

Weitere Beispiele:
$$2y''(x) - 8y = 2e^{\alpha x}$$
$$2y''(x) - 8y = 2e^{-2x}$$
$$y''(x) + 4y = -\sin \omega x$$
$$2y'''(x) - 32y' = x^2$$

Lösungen (Tafel)

Spezialfälle DGL 1. Ordnung, keine konstanten Koeffizienten!: $y' + f(x)y = 0$

Diese Gleichung ist tatsächlich einfach lösbar, wie man durch Umstellen erkennt, da es sich um getrennte Veränderliche handelt die direkte Integration ermöglichen:

$$y' + f(x)y = 0 \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = -f(x) \quad \Rightarrow \int \frac{y'}{y} = \int -f(x)$$

$$\Rightarrow \ln(y) + \tilde{c} = -\int f(x) \qquad \Rightarrow y = ce^{-\int f(x)}$$

Beispiel: $y' + \cos(x)y = 0$

Spezialfälle DGL 1. Ordnung, keine konstanten Koeffizienten, Inhomogenität:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Hier haben wir keine getrennten Variablen. Das Verfahren was hier verwendet wird, nennt sich Variation der Konstanten. Wir kennen die Lösung der homogenen DGL (das Integral ist durch die Stammfunktion ersetzt:

$$y = ce^{-F(x)}$$

Dabei ist c eine Konstante- die nun variiert wird: $y = c(x)e^{-F(x)}$

Einsetzen liefert:

$$c'(x)e^{-F(x)} - c(x)f(x)e^{-F(x)} + f(x)c(x)e^{-F(x)} = g(x)$$

$c'(x)e^{-F(x)} = g(x)$ also $c'(x) = g(x)e^{F(x)}$

daher $c(x) = c + \int g(x)e^{F(x)}$ insgesamt $y(x) = (c + \int g(x)e^{F(x)})e^{-F(x)}$

Beispiel : $y' + \cos(x)y = \cos(x)$ Lösung: $y(x) = (y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \cos u e^{\int\limits_{x_0}^{u} \cos t dt} du)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \cos t dt}$

DGL 2. Ordnung, allgemein: $y'' = f(x, y, y')$

Neben der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten gibt es hier auch interessante Spezialfälle, die sich recht einfach lösen lassen. So ist auch hier die direkte Integration möglich, wenn die Variablen getrennt vorliegen.

Beispiel: welche Form hat eine Kette, die an zwei Punkten aufgehängt wird? Eine Katenoide (auch Kettenlinie oder Kettenkurve,) ist eine mathematische Kurve, die den Durchhang einer an ihren Enden aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt.:

$y'' = c\sqrt{1+(y')^2}$ Die Konstante c enthält die Materialeigenschaften + die Erdbeschleunigung

Lösung:

$$z' = c\sqrt{1+z^2} \quad \Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = c \quad \Rightarrow \int_{z_0}^{z} \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} du = \int_{x_0}^{x} c dt$$

$$\Rightarrow ar\sinh z - ar\sinh z_0 = c(x - x_0)$$

$$\Rightarrow ar\sinh z = c(x+A) \Rightarrow z = \sinh c(x+A)$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \sinh c(t+A) dt = B + \frac{1}{c}\cosh(c(x+A))$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich die Kurve

Erst Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens und Johann Bernoulli wiesen 1691 nach, dass sich die Kettenkurve von einer Parabel unterscheidet. Die Abbildung vergleicht den Kurvenverlauf einer Kettenlinie (rot) mit einer Normalparabel (blau). Bei gleicher Höhe ist die Parabel kürzer, die Kettenkurve weniger gekrümmt.

Die Gleichung folgt aus der Überlegung, dass die Masse sich gleichmäßig über die Kette verteilt und keine Biegemomente auftreten:

$$F_{\text{Gewicht}} = F_{\text{Zug}}$$

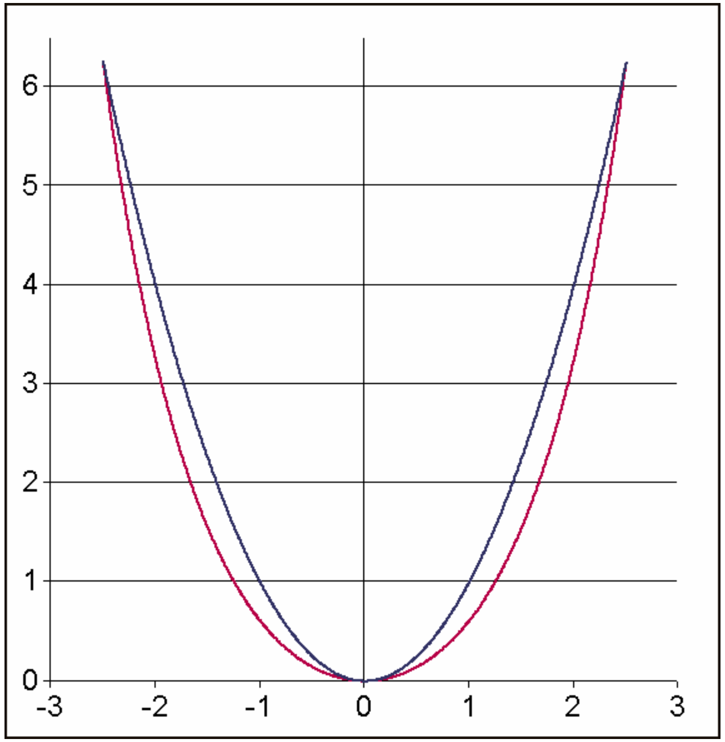
$$m \cdot y''(x) = k \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

$$m \cdot y''(x) = k \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}x}$$

$$m \cdot y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Die Länge der Kettenkurve zwischen zwei Punkten 0 und W beträgt mit a = m / k und v_x = W / 2

$$L = \int_0^W \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = 2\frac{m}{k}\sinh\left(\frac{k \cdot W}{2m}\right) = 2a\sinh\left(\frac{W}{2a}\right)$$



Vergl. http://de.wikipedia.org/wiki/Katenoide

Sagrada Família

Bei der Anfertigung der Statik wandte Gaudí eine zum damaligen Zeitpunkt fast vergessene Technik an: er fertigte das Tragwerk aus Schnüren und hängte das gesamte Bauwerk kopfüber auf. Weil die Schnüre biegeschlaff sind, wirkt in ihnen kein Biegemoment. Das Modell unterscheidet sich vom Original nur durch den Richtungssinn der Belastung und eignet sich deshalb, eine Form zu finden, die nur auf Druck und nicht auf Biegung beansprucht wird.

Model

Seitenansicht des Bauwerks

de.wikipedia.org/wiki/Sagrada_Fam%C3%ADlia

Beispiel:

Das newtonsche Gravitationsgesetz besagt, dass sich die Gravitationskraft F, mit der sich zwei Massen m_1 und m_2 anziehen, proportional zu den Massen beider Körper und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r der Massenschwerpunkte verhält:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = (6{,}6742 \pm 0{,}0010)\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

Den Proportionalitätsfaktor G bezeichnet man als Gravitationskonstante.
Nach Newton:

$$m\ddot{r} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\,, \qquad \ddot{r} = -\gamma\frac{M}{r^2}, r(0) = R,\ \dot{r}(0) = v_0$$

allgemein handelt es sich hier um den Typ: $y'' = f(y)$

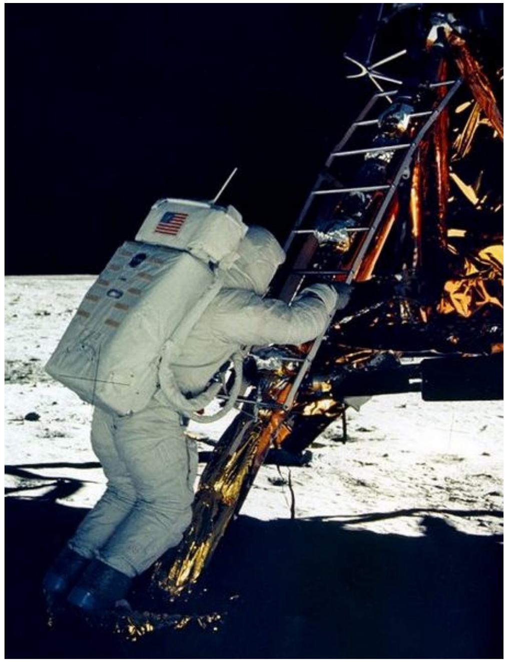
$$2y'y'' = 2y'f(y);\text{ mit } \mathrm{z} = (y')^2 \text{ ist } \mathrm{z}' = 2F'(y) \text{ also getrennte Variable}$$

$$z = 2F(y) + C;\text{ also } (\mathrm{y}')^2 = 2F(y) + C,\text{ insgesamt } \mathrm{y}' = \pm\sqrt{2\mathrm{F}(\mathrm{y}) + \mathrm{C}}$$

$$f(r) = -\gamma \frac{M}{r^2}; \quad \Rightarrow F(r) = \gamma \frac{M}{r} \quad \text{also} \quad \dot{r}^2 = 2F(r) + C$$

Diese DGL sagt, daß die Gesamtenergie erhalten bleibt: $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \gamma \frac{M}{r} = E_{kin} + E_{pot}$

Die Lösung der DGL ergibt die Weg-Zeit Funktion unter Gravitationseinwirkung. Ein Beispiel für ein Anfangswertproblem ist die Mondlandung von Appolo 11:



Mondlandung: Masse Mond: 7,349 10^{22} kg
Durchmesser: 3476 km

Eine andere ist die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde:

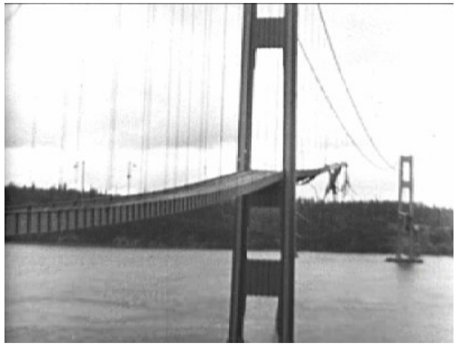
Masse:	5,97 10^{24} kg
Äquator-Durchmesser:	12756 km

Schwingungen stellen ein zentrales Problem in den Ingenieurwissenschaften dar:

Mechanik:	Pendel
Elektrotechnik:	Schwingkreis
Chemie:	Autokatalyse
Ozeanographie:	Gezeiten
Wirtschaft:	“Schweinezyklus”
...	

Anwendung: Nahezu jeder Gegenstand verhält sich wie ein Pendel -> z. B. Resonanzkatastrophe

Häufig wird das folgende Beispiel für eine Resonanzkatastrophe angeführt: Im Jahr 1850 marschierten 730 französische Soldaten im Gleichschritt über die Hängebrücke von Angers. Die Brücke geriet in heftige Schwingungen und stürzte ein; 226 Soldaten fanden dabei den Tod. Es ist daher vielfach untersagt, im Gleichschritt über eine Brücke zu marschieren. Dies betrifft vor allem Soldaten, die gewöhnlich in dieser Gangart marschieren. Für diese heißt es dann "Ohne Tritt, marsch!", wenn sie eine Brücke überqueren.



Tafel & Internet: Vollständige Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung, homogen und inhomogen.

http://www-math.upb.de/~mathkit/Inhalte/Schwingungsgleichung/preview/

Tacoma Narrows Brücke