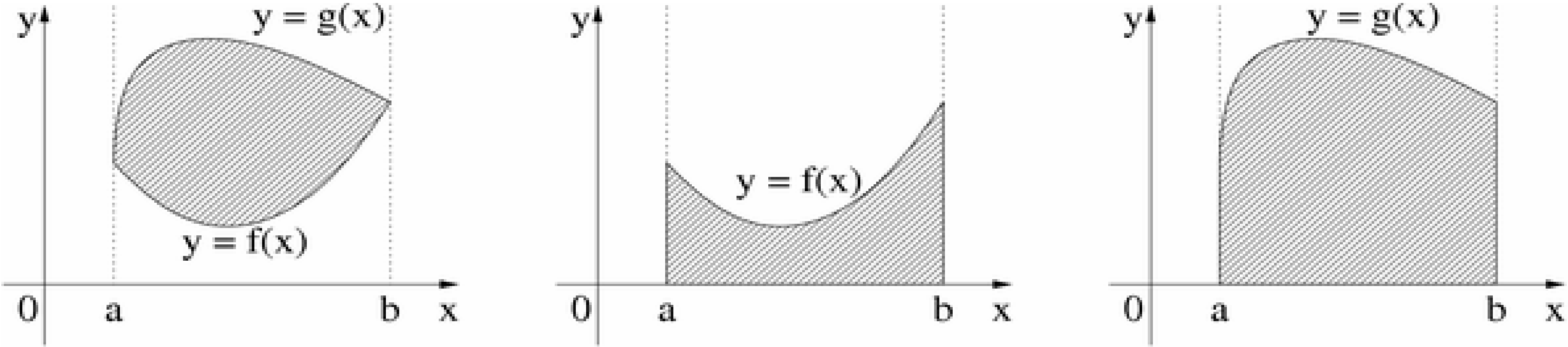
Kapitel 8: Die Kür: Integralrechnung

- Das Integral als Flächeninhalt
- Der Hauptsatz der Infenitesimalrechnung
- Integration von rationalen Funktionen
- Numerische Integrationsverfahren
- Längen- und Volumenberechnungen
- Uneigentliche Integrale

Integral auf kompakten Intervallen: „Kompakt“ bedeutet hier, dass nur Funktionen auf Intervallen der Form [*a,b*] betrachtet werden. Offene oder unbeschränkte Intervalle sind nicht zugelassen.
Ein Ziel der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten krummlinig begrenzter Bereiche der Ebene. In den meisten in der Praxis auftretenden Fälle sind derartige Flächen beschrieben durch zwei Funktionen f,g auf einem endlichen Intervall [a,b], deren Graphen die Fläche begrenzen (linkes Bild).:



Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche im linken Bild ist gleich der Differenz der schraffierten Bereiche in den beiden rechten Bildern.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung

Das Integral als Flächeninhalt

Es genügt also, sich auf den einfacheren Fall einer Fläche zu beschränken, die von:

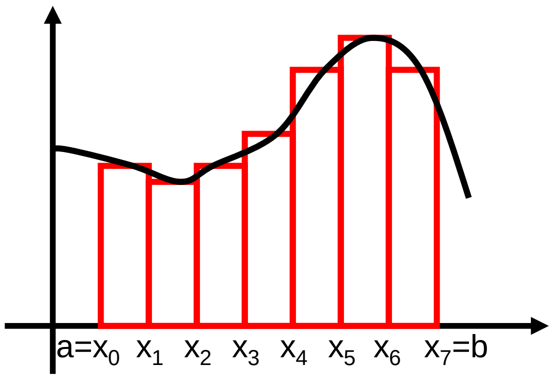
- dem Graphen einer Funktion
- zwei vertikalen Geraden x = a und x = b
- sowie der x-Achse

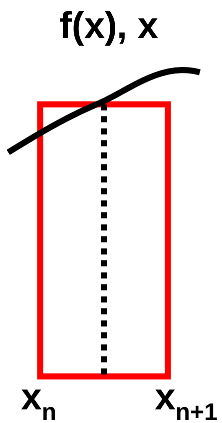
begrenzt wird.

Aufgrund seiner fundamentalen Bedeutung erhält dieser Typ Flächeninhalt eine spezielle Bezeichnung:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gelesen als Integral von a bis b über (oder: von)

Näherung:
Zerlegung in endlich viele Intervalle.





Darboux-Summen:
Obersumme,
Untersumme

Man betrachtet ein Intervall [a, b], welches man in eine Zerlegung Z unterteilt, d. h. in N aneinandergrenzende Teilintervalle (auch bekannt als Streifenmethode des Archimedes)

Z: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots x_{n-1} < x_n = b$

zerlegt, so dass $I_1 = [x_0, x_1]$,..., $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, ..., $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ ist.

Werden jetzt Punkte vom Typ $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ gewählt, dann läßt sich der Flächeninhalt T_n wie folgt darstellen:

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j; \;\; \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

Dabei wird $\overline{S_N} = \sum_{i=1}^{N} \max(f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]) \cdot (t_i - t_{i-1})$ Obersumme (bzw. sup.), und

$\underline{S_N} = \sum_{i=1}^{N} \min(f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]) \cdot (t_i - t_{i-1})$ Untersumme (bzw. inf.) genannt.

Die Grenzwerte $\overline{\int_a^b} f = \inf_Z \overline{S_N}$ und $\underline{\int_a^b} f = \sup_Z \underline{S_N}$

für eine beliebige Zerlegung Z, heißen Ober- bzw. Unterintegral.

(Exkurs: infimum, supremum)

Riemann-Integral:
Das Riemann-Integral (nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann) ist eine Methode zur Bestimmung des Flächeninhaltes zwischen der x-Achse und einer beschränkten Funktion f innerhalb eines Intervalls. Der Übergang von der obrigen Summe zum Integral erfolgt durch Grenzwertbildung:

Falls gilt: $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, so konvergieren die darbouxschen Summen gegen den Grenzwert $\int_a^b f$, welcher Riemann-Integral genannt wird.

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/riemann_sums.4/index.html

Beispiel: $\int_a^b x dx$ Die Intervalle werden gleichmäßig durch $x_j = a + j\frac{b-a}{n}, \quad \Delta x_j = \frac{b-a}{n}$ gewählt.

Daraus ergibt sich:

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} (a + j\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j = a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right); \quad \int_a^b xdx = \lim_{n->\infty} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = a(b-a) + \frac{(b^2-2ab+a^2)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Für manche Funktionen kann es kompliziert werden…

Der Fundamentalsatz der Analysis, auch bekannt als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis, nämlich das der Integration und das der Differentiation, miteinander in Verbindung. Er besagt: Ist $I \subset \Re$ ein reelles Intervall und $f : I -> \Re$ ein beliebiges Element, so ist die Funktion.

$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ stetig differenzierbar und ihre Ableitung ist F ' = f.

Beweis des Fundamentalsatzes:

Es sei $x \in I$ fest und (h_n) eine Nullfolge mit der Eigenschaft, dass $h_n \neq 0$ und $x + h_n \in I$ stets gilt. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung zu jedem *n* ein c_n zwischen *x* und $x + h_n$, so dass

$$F(x+h_n) - F(x) = \int_x^{x+h_n} f(t)\,dt = f(c_n) \cdot h_n$$

gilt. Nach dem Einschnürungsprinzip für Folgen gilt $c_n \to x$ und wegen der Stetigkeit von f folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(\lim_{n\to\infty} c_n) = f(x), \text{ d.h.}$$

F ist in *x* differenzierbar mit der Ableitung *f(x).*

Der Hauptsatz ermöglicht sofort die Berechnung von Integralen, da es sich um eine Umkehrung der Differentiation handelt. Die Funktion F, wird Stammfunktion zu f genannt mit der Eigenschaft: F' = f. Die Umkehrung der Differentationsregeln liefert sofort folgende wichtige Integrale.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t. ; \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a); \qquad F'(x) = f(x);$$

$$f(x) = x \to F(x) = \frac{1}{2}x^2 \to \int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Allgemein:

$f(x) = F(x)$	$F(x)$
$f(x) = ax^n;\ a \in \Re;\ n \in Z \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$
$f(x) = \sin\ x; \cos\ x$	$F(x) = -\cos\ x; \sin\ x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

Die partielle Integration, auch Produktintegration genannt, ist in der Integralrechnung eine Möglichkeit zur Bestimmung von Stammfunktionen. Sie kann als die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung aufgefasst werden:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = \int (u \cdot v)' \, \mathrm{d}x - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$

$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$

Also:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

bzw.:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

Anwendungsbeispiel: $\int_a^b x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$

mit $f(x) = \ln(x)$ $\quad g'(x) = x$

ergibt sich $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{x^2}{2}$

also

$$\int_a^b x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} \cdot \ln(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) - \int_a^b \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} \cdot \left(\ln(b) - \frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right)$$

Beispiel

$$\int e^x \cdot (2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

Setzt man jedes Mal

$g'(x) = e^x$ und für $f(x)$ den übrigen Term unter dem Integral, so ergibt sich

$$\int e^x \cdot (2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$

$$= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)]$$

$$= [e^x \cdot (2x - x^2)]$$

- Steht nur ein Term unter dem Integral, auf dessen Stammfunktion ohne Tabellenwerk nicht ohne weiteres zu schließen ist, kann man gelegentlich durch Einfügen des (unsichtbar vorhandenen) Faktors "1" partiell integrieren.

Substitution eines bestimmten Integrals

Ist $f(x)$ eine integrierbare Funktion und $\varphi(t)$ eine auf dem Intervall $[a,\ b]$ stetig differenzierbare Funktion deren Bildbereich im Wertebereich von f ist, dann gilt ($x = \varphi(t)$; insbesondere $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi = \varphi'(t)\mathrm{d}t$)

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \underbrace{\phi'(t)}_{=\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$

Diese Formel wird benutzt, um ein Integral in ein anderes Integral zu transformieren, das einfacher zu bestimmen ist. Man sagt $\varphi(t)$ substituiert x und umgekehrt.

Beispiel:

Berechnung des Integrals: $\int_0^a \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ für eine beliebige reelle Zahl a>0 :

Durch die Substitution: t = 2x erhalten wir $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ und

$$\int_0^a \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[-\cos(t)]_0^{2a} = \frac{1}{2}(-\cos(2a)+\cos(0)) = \frac{1}{2}(1-\cos(2a))$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Integration_durch_Substitution

Spezialfälle der Substitution

Logarithmische Integration

Integrale mit der speziellen Form *Zähler des Integranden ist Ableitung des Nenners* können sehr einfach mit Hilfe der logarithmischen Integration gelöst werden, was einen Spezialfall der Substitutionsmethode darstellt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \qquad (\forall f(x) \neq 0)$$

Lineare Substitution

Integrale mit linearen Verkettungen können wie folgt berechnet werden:

$$\int f(mx+n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}F(mx+n) + C \qquad (\forall\ m \neq 0)$$

Für das bestimmte Integral gilt entsprechend

$$\int_a^b f(mx+n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(u)\mathrm{d}u \qquad (\forall\ m \neq 0)$$

In der numerischen Mathematik bezeichnet numerische Quadratur bzw. numerische Integration die näherungsweise Berechnung von Integralen.

Das Integral $J(f) = \int_a^b f(x)dx = Q(f) + E(f)$

ist jader Flächeninhalt unterhalb der Kurve der Funktion f(x), wobei wir zunächst annehmen, dass f(x) > 0 im Intervall [a,b] ist.
Oft kann man das Integral nicht geschlossen lösen, d.h. man kann keine Stammfunktion zu f(x) angeben. Deshalb versucht man, Näherungswerte zu ermitteln.
Dazu unterteilt man die gesuchte Fläche in senkrechte Streifen und nähert jede dieser so erhaltenen Teilflächen durch einfache geometrische Figuren (z.B. Trapez) oder einfache Funktionen (z.B. Polynome) an.

Für die Flächenberechnung dieser einfachen Figuren benötigt man den Wert der Funktion f(x) an den so genannten Stützstellen x_0, ... x_m. Die Summe über diese Teilflächen ergibt eine Näherung Q(f) des Integrals. Je schmaler man die einzelnen Teilflächen wählt desto genauer wird die Näherung. Von Interesse ist dann noch die Frage, wie groß der Fehler ist, der sich durch die Näherung ergibt. Dieser Fehler wird durch das Restglied E(f) beschrieben. Um die Anzahl der Funktionsauswertungen zu minimieren, bei gleichzeitiger Möglichkeit den Fehler zu kontrollieren, verwendet man oft das Rombergsche Extrapolationsverfahren. Hierbei werden die Integralwerte von immer kleiner werdenden 'Streifen' zu einer verschwindenden Breite hin extrapoliert.

Man hat nun verschiedene Möglichkeiten, die einzelnen Teilflächen durch spezielle einfachere Flächen anzunähern. Die Anwendung der allgemeinen Quadraturformeln auf diese speziellen Flächen liefert einige bekannte und wichtige spezielle Quadraturformeln.
Sehnentrapezformel

Man ersetzt die Kurve f(x) durch die Verbindungsgerade zwischen den Punkten (a,f(a)) und (b,f(b)) - also durch die Sehne - und erhält somit ein Trapez.

Fläche A von einem Trapez kann folgendermaßen berechnet werden: (aus der Geometrie)

$$Flaeche_T = 0{,}5 * (Seite_1 + Seite_2) * Hoehe$$

In unserem Beispiel schneiden wir ein Trapez im Intervall [a,b] aus. Daraus folgt:

$$Seite_1 = f(a)$$

$$Seite_2 = f(b)$$

$$Hoehe = b - a$$

Ergebnis:

$$A = \frac{1}{2} * (f(a) + f(b)) * (b - a)$$

Parametrisierung:
Für einige Probleme ist es notwendig, Kurven in “Parameterform” darzustellen. Dazu wird die Kurve von einem Startpunkt bis zu einem Endpunkt durchlaufen, wenn ein Parameter einen Wertebereich durchläuft.
Ein schon bekanntes Beispiel ist etwa eine Geradengleichung in der Vektorrechnung die in Parameterform gewählt wird. Aber nicht nur in der linearen Algebra ist dies nutzlich. Unmittelbar einsichtig ist dies für Kurven, die nicht Funktionen sind, weil einem x-Wert mehrere Y-Werte zugeordnet werden. So können die Koordinaten eines Kreises nicht als Funktion angegeben werden (hier muß sonst ein Halbkreis gewählt werden):

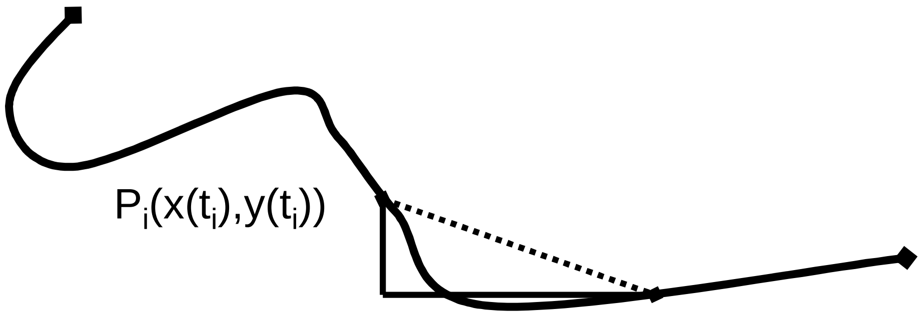
Die Kreisgleichung $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$ läßt sich mittels Sinus und Cosinus parametrisieren:

$$(\cos t; \sin t) \quad \text{für } 0 < t \leq 2\pi$$

oder $$(\cos(2\pi t); \sin(2\pi t)) \quad \text{für } 0 < t \leq 1$$

Mit Hilfe der Parametrisierung lassen sich Kurvenlängen und Wegintegrale berechnen:

Zunächst haben wir eine beliebige Kurve in Parameterform und wenden die “Salamitaktik“ an:



$$\overline{P_iP_{i+1}} = \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i+1}))^2 + (y(t_i)-y(t_{i+1}))^2}$$

$$l = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\overline{P_iP_{i+1}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i+1}))^2 + (y(t_i)-y(t_{i+1}))^2}$$ Summe in ein Integral wandeln:

$$= \lim_{N\to\infty;h\to 0}\sum_{i=1}^{N}\left(\sqrt{\left(\frac{x(t_i)-x(t_{i+1})}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i)-y(t_{i+1})}{h}\right)^2}\right)h = \int_{t=0}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Beispiel: Länge eines Kreises: $x(t)=\cos(2\pi t);\ \mathrm{y(t)}=\sin(2\pi\mathrm{t})$

$$l=\int_{t=0}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t=0}^{1}\sqrt{\left(-2\pi\sin(2\pi t)\right)^2+\left(2\pi\cos(2\pi t)\right)^2}\,dt=2\pi\int_{t=0}^{1}\sqrt{1}\,dt=2\pi$$

Erweitern wir das Ganze ins Dreidimensionale, können wir die Länge einer Schraubenlinie berechnen, was nicht so trivial erscheint:

$$x(t)=\cos(2\pi t);\ \mathrm{y(t)}=\sin(2\pi\mathrm{t});\mathrm{z(t)}=2\pi\mathrm{t}$$

$$l=\int_{t=0}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{t=0}^{1}\sqrt{\left(-2\pi\sin(2\pi t)\right)^2+\left(2\pi\cos(2\pi t)\right)^2+\left(2\pi\right)^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_{t=0}^{1}\sqrt{1+1}\,dt=2\pi\sqrt{2}$$

Schraubenförmiges Treppenhaus in den Vatikanischen Museen

Beispiel: Länge einer Funktion von 0 bis 1: $f(x) = x^{\frac{3}{2}};\ x(t) = t;\ y(t) = t^{\frac{3}{2}}$

$$l = \int_{t=0}^{1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t=0}^{1} \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dt = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1 + \frac{9}{4} t}\, dt = \left. \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4} t\right)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1$$

Da x(t)=t gilt allgemein als Länge für Funktionen:

Ist C der Graph einer Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so wird der Graph durch

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

parametrisiert. Wegen

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

ist die Länge des Graphen gleich

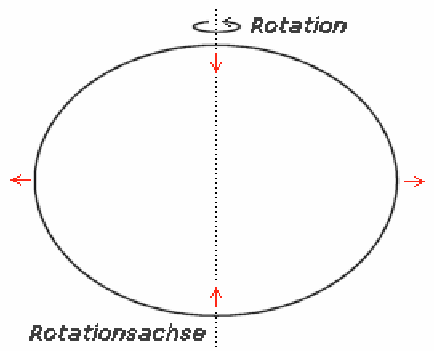
$$\int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

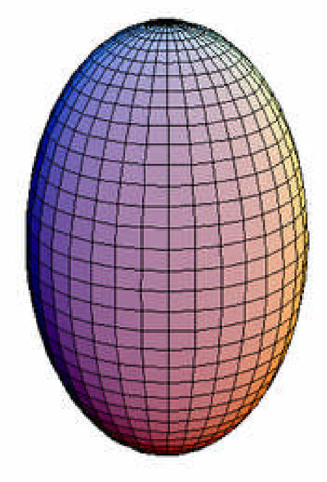
Der Begrif des Kurvenintegrals wird später allgemein eingeführt, er ist ein wesendliches Hilfsmittel.

Volumenberechnung:
Mit der Integralrechnung lassen sich neben Flächeninhalten auch Volumina berechnen.
Hier wird zunächst der Spezialfall “Rotationskörper“ verwendet. Für einen Rotationskörper, der durch Rotation des Graphen der Funktion f im Intervall [a,b] um die x-Achse entsteht, lautet die Formel zur Volumenberechnung: Bei Rotation um die y-Achse muss die Umkehrfunktion $x=f^{-1}(y)$ gebildet werden:

Rotation x- Achse: $$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Rotation y- Achse: $$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy$$





Herleitung der Formel für das Volumen eines Rotationskörpers

Auch hier hilft die “Salamitaktik”: Der Rauminhalt des Rotationskörpers auf der x-Achse im Intervall [a;b] wird in n kleine Zylinder mit der Querschnittsfläche πr^2 (Kreis) und der Höhe $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zerlegt. Anschließend lässt man die Anzahl n der Zylinder gegen unendlich streben wobei die Höhe der kleinen Zylinder gegen 0 strebt. Schließlich müssen nur mehr alle Zylinder summiert werden.

Der Radius ist gleich dem Funktionswert von $r = f(x_i)$

$V = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\pi\Delta x$ Diese Summe läßt sich nun beim Grenzübergang in ein Integral verwandeln:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\pi\Delta x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Für die Rotation um die y- Achse wird die Umkehrfunktion verwendet.

Beispiel Rotationsparaboloid:
Wenn man eine Flüssigkeit gleichmäßig um eine senkrechte Achse dreht, dann überlagern sich Schwerkraft und Fliehkraft, und die Flüssigkeitsoberfläche nimmt die Form eines Rotationsparaboloids an. So funktioniert das Quecksilber-Teleskop, und so kann man auch Teleskop-Spiegel gießen, um danach nicht so viel Material abschleifen zu müssen, da die beim Guss erhaltene Oberfläche bereits ein Rotationsparaboloid darstellt.

Für einen Punkt auf der Grenzfläche gilt:

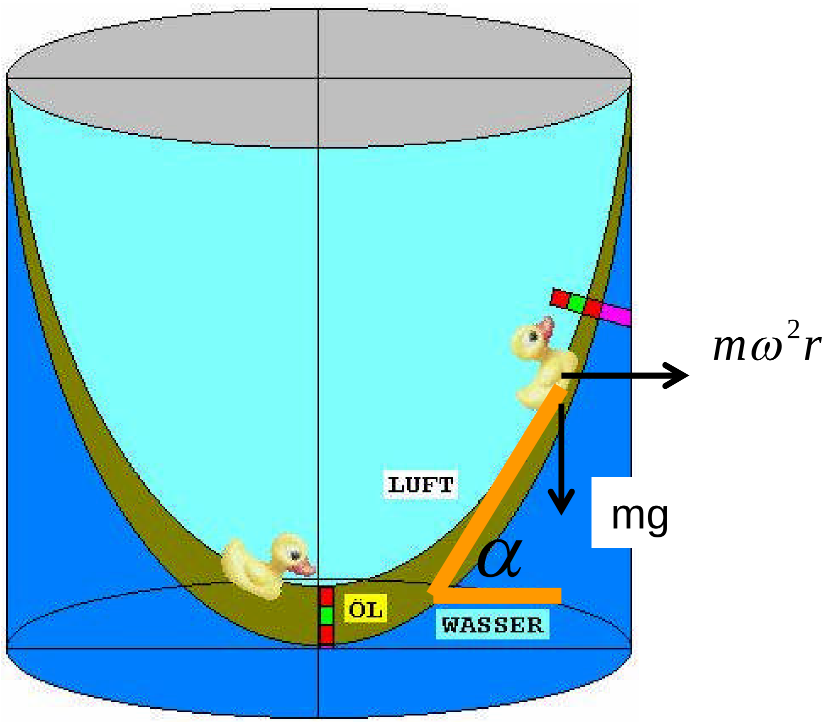
Gewichtskraft kompensiert Zentripetalbeschleunigung:

$$mg\tan\alpha = \frac{mv^2}{r}$$

$$mg\tan\alpha = m\omega^2 r$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 r}{g} \qquad dy = \frac{\omega^2 x}{g}dx$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$



Das Integral war oben stets über kompakten Mengen definiert, also beschränkten und abgeschlossenen Intervallen, wo die Integrationsgrenzen Teil der Definitionsmenge sind. Die Verallgemeinerung auf unbeschränkte Definitionsbereiche oder Funktionen mit Definitionslücken verläuft je nach gewählter Konstruktion etwas unterschiedlich. In der Lebesgue-Theorie ergibt sich die Verallgemeinerung vollkommen natürlich, in der Riemann-Theorie muss man mit Grenzwerten von Integralen über kompakte Bereiche arbeiten; man spricht in diesem Zusammenhang von uneigentlichen Integralen.

Beispiele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Singularität bei 0

http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Glockenkurve