

---

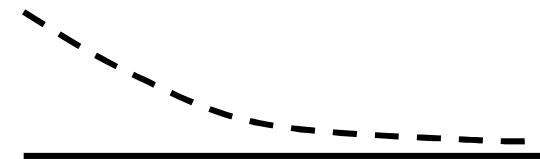
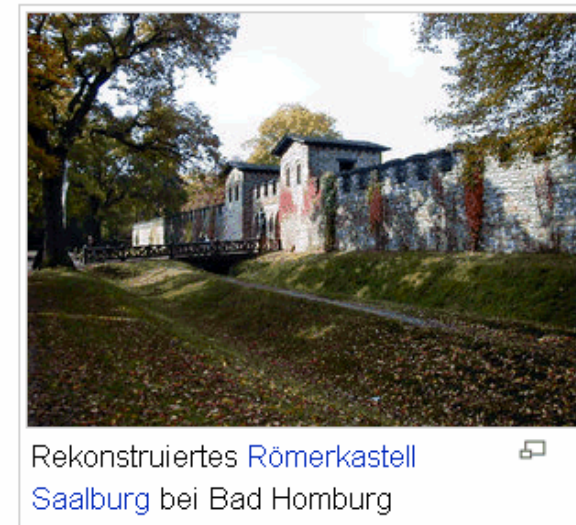
## Kapitel 7: Die Pflicht: Differentialrechnung

- Grenzwert und Stetigkeit
- Nullstellen stetiger Funktionen
- Uneigentliche Grenzwerte
- Die Ableitung
- Die geometrische Bedeutung der Ableitung
- Die Ableitung als Geschwindigkeit
- Affine Näherung
- Berechnung der Ableitung

Limes = Grenzwert, nach röm. Befestigungsanlage

## Obergermanisch-Raetischer Limes

Der **Obergermanisch-raetische Limes** ist ein Grenzwall mit **Kastellen**, **Wachtürmen**, **Mauern** und **Palisaden**, mit denen die Römer die Landstriche auf dem östlichen Rheinufer für lange Zeit unter ihre Kontrolle brachten. Der Begriff **Limes** bedeutete im Lateinischen „Grenzweg“; neben dem rätisch-germanischen Limes ist der **Hadrianswall** zwischen England und Schottland besonders bekannt, der **1987** von der **UNESCO** zum **Weltkulturerbe** erklärt wurde. Am **15. Juli 2005** wurde von der UNESCO auch dieses **Bodendenkmal** in Deutschland in die Liste des **Weltkulturerbes** aufgenommen. Daneben gab es in römischer Zeit **Limites** in Nordafrika und im vorderen Orient. Der Limes wird als erste definierte **Staatsgrenze** in **Mitteleuropa** angesehen.



Das Symbol  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bezeichnet den Limes der reellen Funktion  $f$  für den Grenzübergang der Variablen  $x$  gegen  $a$ . Dabei kann  $a$  sowohl eine reelle Zahl sein als auch einer der Werte  $+\infty$  und  $-\infty$ ; in jedem Fall muss  $a$  jedoch im Abschluss des Definitionsbereiches von  $f$  liegen. Auch für den Grenzwert selbst kommen neben reellen Zahlen auch  $+\infty$  und  $-\infty$  in Frage. Dementsprechend gibt es mehrere Definitionsvarianten des Limesbegriffs:

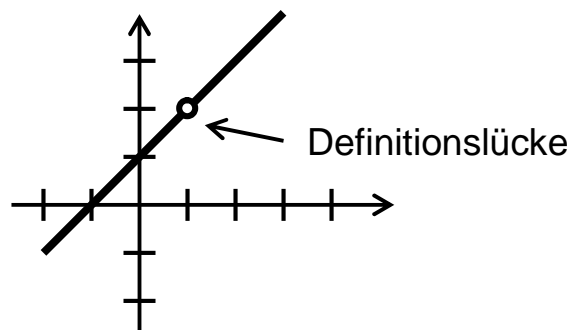
Definition: Die Funktion  $f$  hat für  $x \rightarrow a$  (mit  $a \in \mathbb{R}$ ) den Limes  $b$ , wenn es zu jedem (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  ein (im Allgemeinen von  $\varepsilon$  abhängiges)  $\delta > 0$  gibt, sodass für beliebige  $x$ -Werte aus dem Definitionsbereich von  $f$ , die der Bedingung  $|x - a| < \delta$  genügen, auch  $|f(x) - b| < \varepsilon$  gilt.

Qualitativ ausgedrückt bedeutet dies: Der Unterschied zwischen dem Funktionswert  $f(x)$  und dem Limes  $b$  kann beliebig klein gemacht werden, wenn man  $x$  genügend nahe bei  $a$  wählt.

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

für  $x \neq 1$ :  $f(x) = (x+1)$



aber:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Sei  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Dann gelten folgenden Beziehungen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = ab$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a/b \text{ falls } b \neq 0$$

wenn  $f(x) \geq g(x)$  dann ist auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  also  $a \geq b$

Wichtige Grenzwerte sind:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

Der Limes erlaubt die Definition der Stetigkeit, die Idee der Stetigkeit kann wie folgt beschrieben werden:

Eine reellwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist stetig, wenn der Graph der Funktion  $f$  ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann. Die Funktion darf insbesondere keine Sprungstellen haben. Diese Aussage ist keine Definition, weil unklar ist, was unter in einem Zug zeichnen genau zu verstehen ist, beispielsweise bei einer Kurve, die auf einem endlichen Intervall eine unendliche Länge hat. Trotzdem entspricht sie ungefähr der Bedeutung der Stetigkeit und ist daher für die Anschauung sehr nützlich.

Reelle Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Definitionsbereich  $D$  und ihr Zielbereich Teilmengen der reellen Zahlen sind. Für solche Funktionen ist die Stetigkeit von  $f$  in einem Punkt  $x_0$  des Definitionsbereichs folgendermaßen definiert:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \in D \iff \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Äquivalent dazu ist die folgende Definition:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

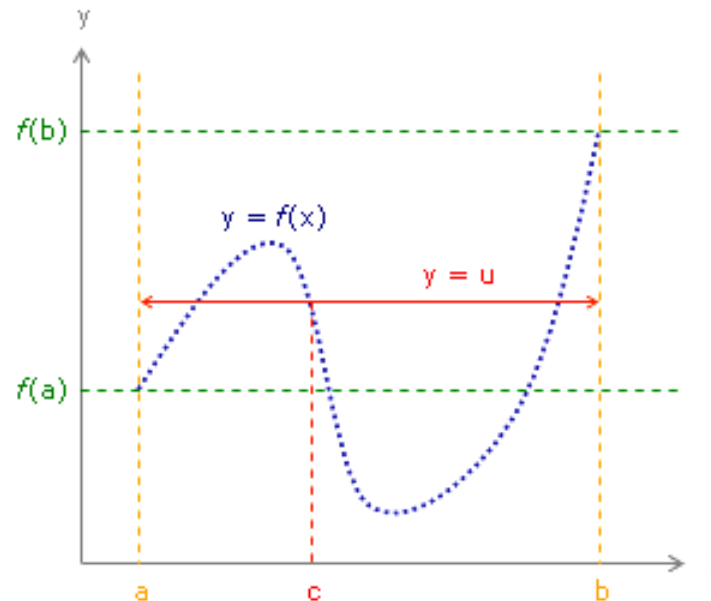
Eine Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist. Z. B. ist die Signum-Funktion:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig, aber nicht insgesamt stetig, da sie an der Stelle 0 unstetig ist: Der linksseitige Grenzwert ist -1, der rechtsseitigen Grenzwert ist +1 und somit existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$  nicht.

Zwischenwertsatz: In der reellen Analysis ist der Zwischenwertsatz ein wichtiger Satz über die Existenz von Nullstellen stetiger Funktionen.

Er sagt aus, dass eine reelle Funktion  $f$ , die auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a,b]$  stetig ist, jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt. Haben insbesondere  $f(a)$  und  $f(b)$  verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von  $f$  im offenen Intervall  $(a,b)$ .



Zwischenwertsatz:

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reelle Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem  $v \in [f(a), f(b)]$  ein  $u \in [a, b]$  mit  $f(u) = v$ .

Beweis des Zwischenwertsatzes:

Es sei  $v \in [f(a), f(b)]$

Die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - v$  ist stetig auf  $[a, b]$  und es gilt  $g(a) < g(b)$ ; zusätzlich haben wir  $g(a) \leq 0$  und  $g(b) \geq 0$

Nun müssen wir nur einen Punkt  $u \in [a, b]$  mit  $g(u) = 0$  finden, denn dann ist  $f(u) = v$ .

Wir konstruieren dazu eine Intervallschachtelung  $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$  mit  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] & \text{falls } g(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0 \\ [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{sonst} \end{cases}$

Falls  $g(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$  ist, sind wir fertig mit der Wahl  $u = \frac{a_k+b_k}{2}$ . Andernfalls gilt nach dem Intervallschachtelungsprinzip

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{u\} \quad \text{für eine Zahl } u \in [a, b] \quad \text{und wir wollen } g(u) = 0 \text{ zeigen.}$$

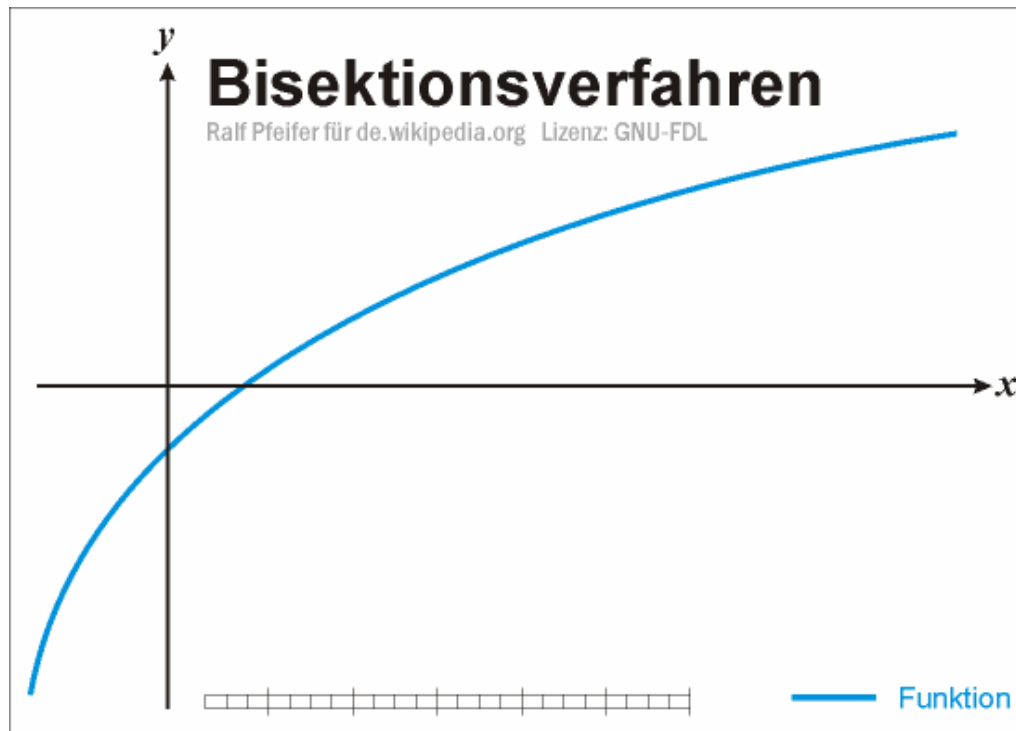
Nach der Konstruktion der Intervallschachtelung ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = u$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = u$

Aus der Stetigkeit von  $g$  im Punkt  $u$  folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(a_k) = g(u)$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(b_k) = g(u)$

Wegen  $g(a_k) \leq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt auch  $g(u) \leq 0$ , und wegen  $g(b_k) \geq 0$  folgt analog  $g(u) \geq 0$ . Damit ist  $g(u) = 0$  bewiesen.

Das Bisektionsverfahren ist ein Algorithmus, der den Zwischenwertsatz zur Nullstellenfindung ausnutzen kann:

1. Setze  $l=a$  und  $r=b$ .
2. Teste, ob  $[l,r]$  eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob  $r - l < \varepsilon$  ist. Wenn ja, haben wir unser Intervall gefunden!
4. Sonst teile  $[l,r]$  in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.



Das Symbol  $\infty$  wird in der Analysis verwendet, um anzuzeigen, dass eine Folge reeller Zahlen oder eine andere reellwertige Funktion über alle Grenzen wächst. Siehe dazu Konvergenz und Limes. Für  $\infty$  gelten einige Rechenregeln, die jedoch stets als Aussagen über (uneigentliche) Grenzwerte zu betrachten sind.

Unter anderem gilt die Rechenregel: **für jede reelle Zahl  $a$ :  $a + \infty = \infty$**

Präziser formuliert meint dies folgendes: Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei Folgen reeller Zahlen, so dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert und  $(b_n)$  über alle Grenzen wächst

(in Zeichen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ )

dann gilt für die Folge  $(a_n + b_n)$ , dass sie über alle Grenzen wächst,

(also  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ .)

Daraus folgt allerdings, dass für das Symbol  $\infty$  manche für Zahlen konstituierende Rechenregeln **nicht** gelten können, *dass es sich dabei also nicht um eine Zahl handeln kann*: Denn könnte man z.B. von einer Gleichung " $\infty$ " *subtrahieren*, dann würde aus der oben genannten Regel (etwa für  $a = 1$ , also aus  $1 + \infty = \infty$ ) der Widerspruch  $1 = 0$  folgen.

Operationen mit unendlich (würde ein Mathematiker so nicht machen):

$$\begin{aligned} \infty \pm x &\rightarrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \infty + \infty &\rightarrow \infty \\ -\infty - \infty &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\infty} &= \frac{x}{-\infty} \rightarrow 0 \\ \frac{x}{0} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Eine Funktion, die ein offenes Intervall  $U$  auf die reellen Zahlen abbildet  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in U$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{mit } h = x - x_0)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $x_0$  und wird als

$$f'(x_0) \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ oder } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ notiert.}$$

Die Terme  $dx$  und  $dy$  heißen Differentiale. Sie stellen infinitesimal kleine Zahlenwerte dar (vgl. Einleitung). In manchen Anwendungen (Kettenregel, Integration mancher Differentialgleichungen, Integration durch Substitution) rechnet man mit ihnen fast wie mit "normalen" Variablen. Ein Differential ist auch Teil der üblichen Notation für Integrale.

Die Notation einer Ableitung als Quotient zweier Differentiale wurde von Leibniz eingeführt. Newton benutzte einen Punkt über der abzuleitenden Größe, was in der Physik für Zeitableitungen bis heute üblich geblieben ist. Die Notation mit Apostroph ( $f'$ ) geht auf Lagrange zurück, der sie 1797 in seinem Buch *Théorie des fonctions analytiques* einführte.

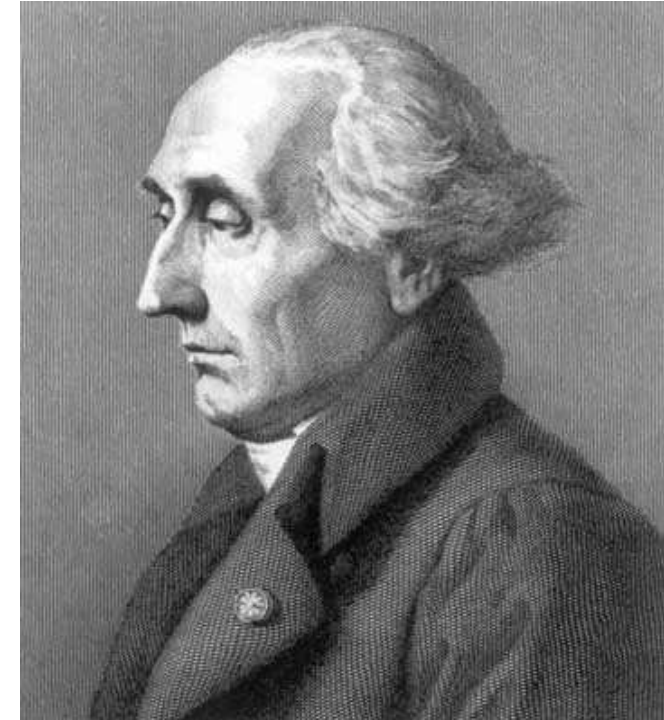
Lagrange wird als Giuseppe Luigi Lagrangia in Turin geboren. Sein Vater war ein wohlhabender Beamter, aber durch Spekulationen erlitt die Familie erhebliche finanzielle Verluste. Lagrange besuchte das Turiner Kolleg, wo er mit 17 das erste mathematische Interesse zeigte, nachdem er zufällig eine Veröffentlichung Edmund Halleys über erste Prinzipien stieß. Sein Vater wollte, dass er Anwalt wird, aber in der Schule interessierte sich Lagrange schließlich mehr für Mathematik, speziell die Geometrie. Er brachte sich innerhalb eines Jahres das gesamte Wissen eines vollausgebildeten Mathematikers seiner Zeit bei.

Mit 19 Jahren erhält er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Königlichen Artillerieschule in Turin. In Turin veröffentlicht er seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten über Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 1757 gehört er zu den Gründern Turiner Akademie.

Dem Ruf Friedrich II. von Preußen folgend geht er 1766 nach Berlin als Direktor der Berliner Akademie und Nachfolger von Leonhard Euler. Hier beschäftigt er sich mit Problemen der Astronomie, aber auch mit partiellen Differentialgleichungen sowie Fragen aus Geometrie und Algebra.

Nach dem Tod Friedrichs II. (1786) geht er 1787 nach Paris als Pensionär der Akademie sc. Nach einer Phase der Depression erscheint 1788 hier sein bekanntes Werk über theoretische Physik *Mécanique analytique*, eine weitere Veröffentlichung behandelt das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik. Ab 1795 lehrt er für kurze Zeit an der *École Normale Supérieure* und tritt in das neu gegründete Institut de France ein. Ab 1797 ist er Mitglied der *École Polytechnique*. Mit Augustin Louis Cauchy arbeitet er auf dem Gebiet der Analysis.

Unter Napoleon wurde er zum Grafen und Senator von Frankreich ernannt. Er ist im Pantheon aufgebahrt.



Beispiel:  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) + 1 - (x_0^2 + 2x_0 + 1)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h + 1 - x_0^2 - 2x_0 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h + 2 = 2x_0 + 2 \quad \text{also} \quad f'(x_0) = 2x_0 + 2
 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + \dots + h^n - x_0^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx_0^{n-1}h + \dots + h^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1} + \dots + h^{n-1} = nx_0^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{also } f'(x_0) = nx^{n-1}$$

Die Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ , bezeichnet mit  $f'(x_0)$ , beschreibt lokal das Verhalten der Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle  $x_0$ . Nun wird  $x_0$  im Allgemeinen nicht die einzige Stelle sein, an der  $f$  differenzierbar ist. Man kann daher versuchen, jeder Zahl  $x$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  die Ableitung an dieser Stelle (also  $f'(x)$ ) zuzuordnen. Auf diese Weise erhält man eine neue Funktion  $f'$ , deren Definitionsbereich eine Teilmenge des Definitionsbereiches von  $f$  ist.  $f'$  heißt die Ableitungsfunktion oder kurz die Ableitung von  $f$ . Beispielsweise hat die Quadratfunktion  $f: x^2$  an einer beliebigen Stelle  $x_0$  die Ableitung  $f'(x_0) = 2x_0$ . Daher ist die zugehörige Ableitungsfunktion  $f'$  gegeben durch  $f': (x_0) = 2x$ .

Die Ableitungsfunktion ist im Normalfall eine andere als die ursprüngliche, einzige Ausnahme ist die Exponentialfunktion  $e^x$  und ihre Vielfachen (und natürlich die Funktion, die jedem Wert "0" zuordnet).

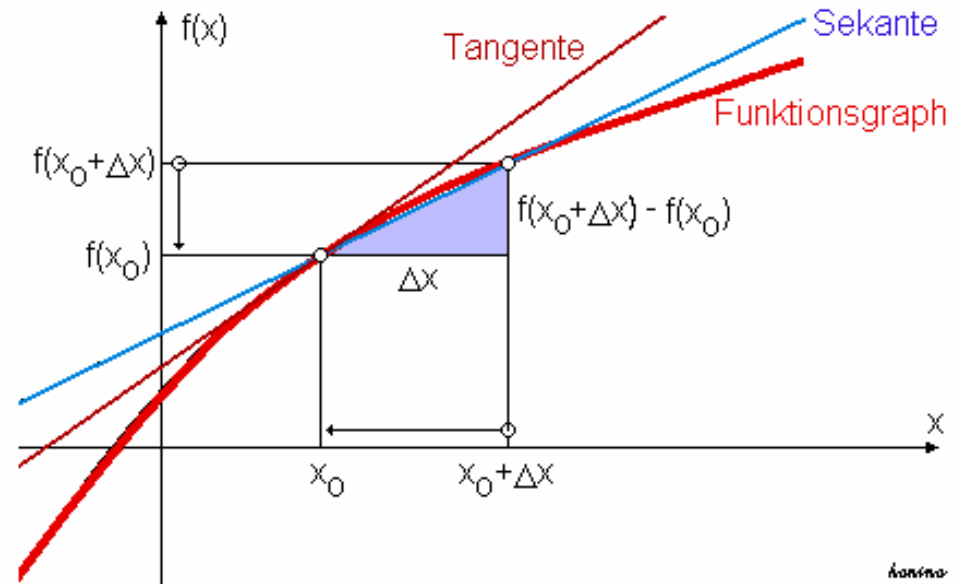
Ausgangspunkt für die Definition der Ableitung ist die Näherung der Tangentensteigung durch eine Sekantensteigung. Gesucht sei die Steigung einer Funktion  $x \rightarrow f(x)$  in einem Punkt  $x_0$ . Man berechnet zunächst die Steigung der Sekante an  $f$  über einem endlichen Intervall  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ :

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

Die Sekantensteigung ist also der Quotient zweier Differenzen; sie wird deshalb auch Differenzenquotient genannt. Mit der Kurznotation  $y$  für  $f(x)$  kann man die Sekantensteigung abgekürzt

als  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  schreiben.

Um eine Tangentensteigung (im genannten Anwendungsbeispiel also eine Momentangeschwindigkeit) zu berechnen, muss man die beiden Punkte, durch die die Sekante gezogen wird, immer weiter aneinander rücken. Dabei gehen sowohl  $\Delta x$  als auch  $\Delta y$  gegen Null. Der Quotient  $\Delta y / \Delta x$  bleibt aber im Normalfall endlich.



kurve

Die Definition der Geschwindigkeit als Zeitableitung des Ortes lässt sich in drei Schritten nachvollziehen.

1. Gesamtdurchschnittsgeschwindigkeit:  $\bar{v} = \frac{s}{t}$

2. Durchschnittsgeschwindigkeit in einem bestimmten Abschnitt:  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

3. Momentangeschwindigkeit (= differentielle Abschnittsgeschwindigkeit):  $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Eine Strecke ist immer richtungsbehaftet und daher ein Vektor. Aus diesem Grunde ist auch die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe. Im Englischen wird daher (besonders unter Mathematikern) gelegentlich zwischen velocity (vektorielle Geschwindigkeit) und speed (Betrag der Geschwindigkeit) unterschieden.

Ist die Positionsveränderung  $s$  als Funktion der Zeit  $t$  in der Form  $s = s(t)$  gegeben, ergibt sich die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit durch Differenzieren dieser Funktion:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist dann die Beschleunigung, die ebenfalls ein Vektor ist:

$$a(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$

Affin: von "affinis" (lat.) verwandt

Die affine Näherung an einen Punkt einer Funktion ist die Gleichung der Tangente, die in dem Punkt anliegt.

Es sei  $f$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x) & x = x_0 \end{cases}$  damit ist  $g$  in  $x_0$  stetig

Also:  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$  ist ebenfalls stetig und läßt sich umformen zu:

$$f(x) = t(x) + (x - x_0)(g(x) - f'(x_0)) \quad \text{mit} \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$t(x)$  wird affine Näherung genannt und ist die Tangentengleichung. Sie ist die beste Näherung für die Funktion von all den Geraden, die durch  $x_0$  laufen. D.h. sie konvergiert am schnellsten und liefert eine bessere Näherung! Daher werden sehr häufig in der Physik, Materialwissenschaft, Elektrotechnik, Biologie..... Näherungen durch Tangenten durchgeführt. (Eine Tangente ist über die Ableitung auch äußerst einfach zu bestimmen.)

## Ableitungsregeln

Ableitungen zusammengesetzter Funktionen (z. B.  $\sin(2x)$  oder  $x^2 e^{-x^2}$ ) führt man mit Hilfe von Ableitungsregeln (siehe unten) auf die Differentiation elementarer Funktionen zurück.

Mit den folgenden Regeln kann man die Ableitung zusammengesetzter Funktionen auf Ableitungen einfacherer Funktionen zurückführen. Seien  $f$ ,  $g$  und  $h$  (im Definitionsbereich) differenzierbare, reelle Funktionen,  $n$  und  $a$  reelle Zahlen, dann gilt:

• konstante Funktion:	$(a)' = 0$
• Potenzregel:	$(x^n)' = nx^{n-1}$
• Summenregel:	$(g + h)' = g' + h'$
• Differenzregel:	$(g - h)' = g' - h'$
• Faktorregel:	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$
• Produktregel:	$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$
• Quotientenregel:	$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$
• Kettenregel:	$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Umkehrregel:</li> </ul>	<p>Ist <math>f</math> eine an der Stelle <math>x_0</math> differenzierbare, bijektive Funktion mit <math>f'(x_0) \neq 0</math>, und ihre Umkehrfunktion <math>f^{-1}</math> bei <math>f(x_0)</math> differenzierbar, dann gilt:</p> $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$ <p>(Spiegelt man einen Punkt <math>P</math> des Graphen von <math>f</math> an der 1. Mediane und erhält damit <math>P^*</math> auf <math>f^{-1}</math>, so ist die Steigung von <math>f^{-1}</math> in <math>P^*</math> der Kehrwert der Steigung von <math>f</math> in <math>P</math>)</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Logarithmische Ableitung:</li> </ul>	<p>Aus der Kettenregel folgt für die Ableitung des natürlichen Logarithmus einer Funktion <math>f</math>:</p> $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$ <p>Ein Bruch der Form <math>f'/f</math> wird logarithmische Ableitung genannt.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ableitung der Potenzfunktion:</li> </ul>	<p>Um <math>f(x) = g(x)^{h(x)}</math> abzuleiten, erinnert man sich, dass Potenzen mit reellen Exponenten auf dem Umweg über die Exponentialfunktion definiert sind: <math>f(x) = \exp(h(x) \cdot \ln(g(x)))</math>. Anwendung der Kettenregel und – für die innere Ableitung – der Produktregel ergibt</p> $f'(x) = \left( h'(x) \ln(g(x)) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right) g(x)^{h(x)}.$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Leibnizsche Regel</li> </ul>	<p>Die Ableitung <math>n</math>-ter Ordnung für ein Produkt aus zwei <math>n</math>-fach differenzierbaren Funktionen ergibt sich aus</p> $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$ <p>Die hier auftretenden Ausdrücke der Form <math>\binom{n}{k}</math> sind Binomialkoeffizienten.</p>

Beweis der Produktregel:

Behauptung: Sei  $f(x) = g(x)h(x)$   $h, g \in \mathbb{R}$

Dann ist  $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(x+\varepsilon)h(x+\varepsilon) - g(x)h(x)}{\varepsilon} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(x+\varepsilon)h(x+\varepsilon) - g(x)h(x+\varepsilon) + g(x)h(x+\varepsilon) - h(x)g(x)}{\varepsilon} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{(g(x+\varepsilon) - g(x))h(x+\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{g(x)(h(x+\varepsilon) - h(x))}{\varepsilon} \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(g(x+\varepsilon) - g(x))}{\varepsilon} h(x+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(h(x+\varepsilon) - h(x))}{\varepsilon} g(x) \\
 &= g'(x)h(x) + h'(x)g(x) \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$