Kapitel 4: Die Macht des Imaginären: Komplexe Zahlen

- Definition und erste Eigenschaften komplexer Zahlen
- Die Polardarstellung komplexer Zahlen
- Polynome im Komplexen
- Exponentialfunktion im Komplexen
- Komplexe Funktionen

Die axiomatische Definition nimmt zunächst keinerlei Bezug auf die imaginäre Einheit i:
Im 2-D reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der geordneten reellen Zahlenpaare z = (a,b) wird neben der Addition

(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)

(das ist die gewöhnliche Vektoraddition) eine Multiplikation durch

(a, b) * (c, d) = (a * c - b * d, a * d + b * c)

definiert. Nach dieser Festlegung schreibt man $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird zu einem Körper, dem Körper der komplexen Zahlen.
Zwei komplexe Zahlen sind also dann gleich wenn ihre Real- (so wird die vordere Stelle genannt) und Imaginärteile übereinstimmen

Erste Eigenschaften

- Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a, 0)$ ist eine Körpereinbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, vermöge derer wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a,0)$ identifizieren.
- Die Zahl $0 = (0,0)$ ist das Nullelement von $\mathbb{C}$.
- Die Zahl $1 = (1,0)$ ist das Einselement von $\mathbb{C}$.
- Das multiplikative Inverse (Reziproke) zu $z = (a, b) \neq 0$ ist $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

Begründung der "a+bi"-Notation (algebraischen Form)

Durch $\mathrm{i} = (0,1)$ wird die **imaginäre Einheit i** festgelegt; für diese gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

Jede komplexe Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ besitzt die *eindeutige* Darstellung der Form

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b\,\mathrm{i}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$; dies ist die übliche Schreibweise für die komplexen Zahlen.

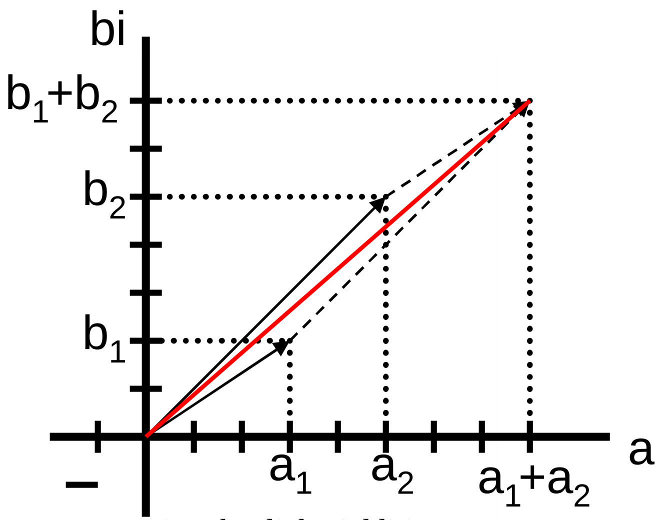
Addition, Subtraktion:

Analog zur Addition: $(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$

funktioniert auch die Subtraktion: $(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i$.

Der Realteil des Produkts besteht aus dem Produkt der Realteile minus dem Produkt der Imaginärteile, der Imaginärteil des Produkts ist die Summe der beiden gemischten Produkte "Realteil mal Imaginärteil":

$$(a + b\,i)\,(c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$



Anschaulich: Addition
(Multiplikation mit reeler Zahl: Streckung)

Rechenbeispiele

Addition:

$$(3+2i)+(5+5i)=(3+5)+(2+5)i=8+7i$$

Subtraktion:

$$(5+5i)-(3+2i)=(5-3)+(5-2)i=2+3i$$

Multiplikation:

$$(2+5i)\cdot(3+7i)=(2\cdot 3-5\cdot 7)+(2\cdot 7+5\cdot 3)i=-29+29i$$

Division:

$$\frac{(2+5i)}{(3+7i)}=\frac{(2+5i)}{(3+7i)}\cdot\frac{(3-7i)}{(3-7i)}=\frac{6-14i+15i-35i^2}{9+21i-21i-49i^2}=\frac{41+i}{9+49}=\frac{41+i}{58}$$

Komplexe Konjugation

Dreht man das Vorzeichen des Imaginärteil b einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ um, erhält man die zu z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$ (manchmal auch z^* geschrieben).

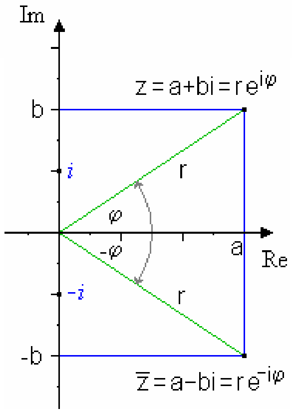
Die Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$ ist ein Körperautomorphismus, da sie mit Addition und Multiplikation verträglich ist, d.h. für alle $y, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{y+z} = \bar{y} + \bar{z}, \quad \overline{y \cdot z} = \bar{y} \cdot \bar{z}.$$

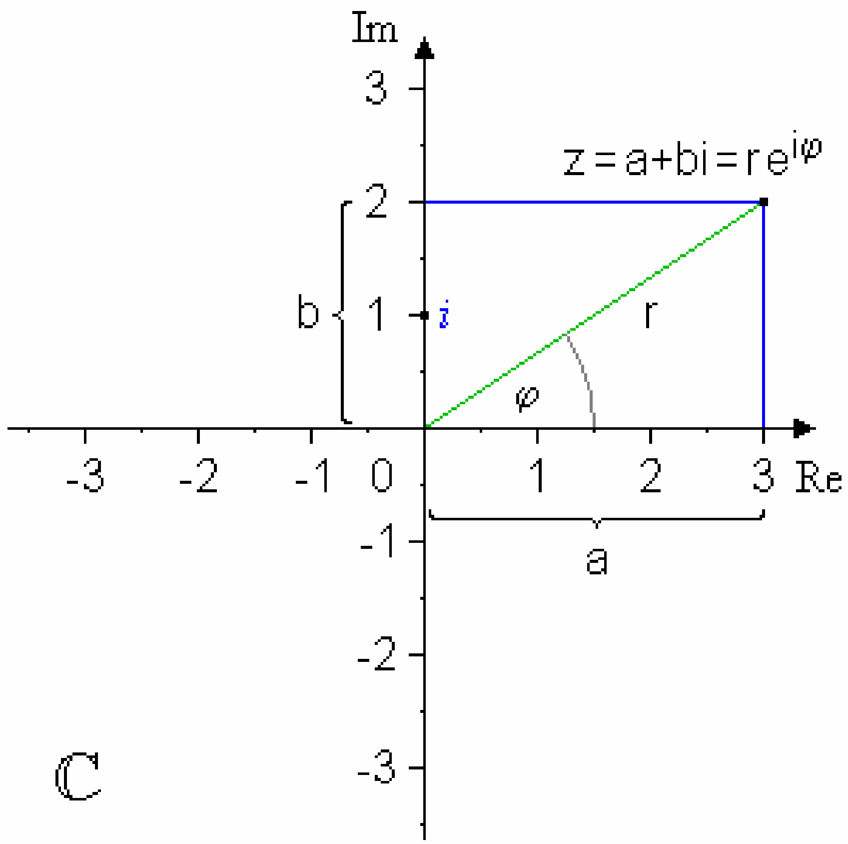
In der Polardarstellung hat die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ bei unverändertem Betrag gerade den negativen Winkel von z. Man kann die Konjugation in der komplexen Zahlenebene also als die *Spiegelung an der reellen Achse* identifizieren. Insbesondere werden unter der Konjugation genau die reellen Zahlen wieder auf sich selbst abgebildet.

Das Produkt einer komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ mit ihrer komplex Konjugierten $\bar{z}$ ergibt das Quadrat des Betrages:

$$z \cdot \bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2.$$



Betrag: $|z| = (z\,z^*)^{0.5} = \sqrt{zz^*}$



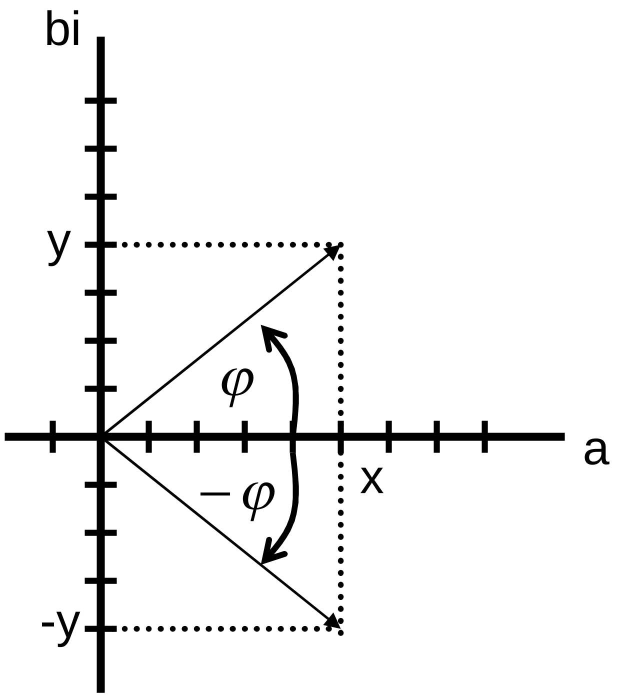
Polar und Exponentialform:
Jede komplexe Zahl z=a+bi kann in der Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geschrieben werden!

$$e^{i\varphi} \equiv \sum \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

Also: $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

(Beweis über Reihenentwicklungen)

Polarform, Trigonometrische Form!



Umrechnungsformeln

Von der algebraischen Form zur Polarform

Für $z = a + ib$ in algebraischer Form ist

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ;$$

für $z \neq 0$ wird das Argument wie folgt bestimmt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arccos\frac{a}{r} & \text{für } b \geq 0 \\ \arccos\left(-\frac{a}{r}\right) - \pi & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

Multiplikation und Division in der Polarform

Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert:

$$r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \ \cdot \ s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi) = r \cdot s \cdot [\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \psi)]$$

Bei der Division wird der Betrag des Divisors durch den Betrag des Dividenden geteilt, und die Phase des Divisors von der Phase des Dividenden subtrahiert:

$$\frac{p \cdot (\cos\phi + \mathrm{i} \cdot \sin\phi)}{r \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi)} = \frac{p}{r} \cdot [\cos(\phi - \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\phi - \psi)]$$

Multiplikation in der Exponentialform

Hier werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert:

$$(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}) \cdot (s \cdot e^{\mathrm{i}\psi}) = (r \cdot s) \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi + \psi)}$$

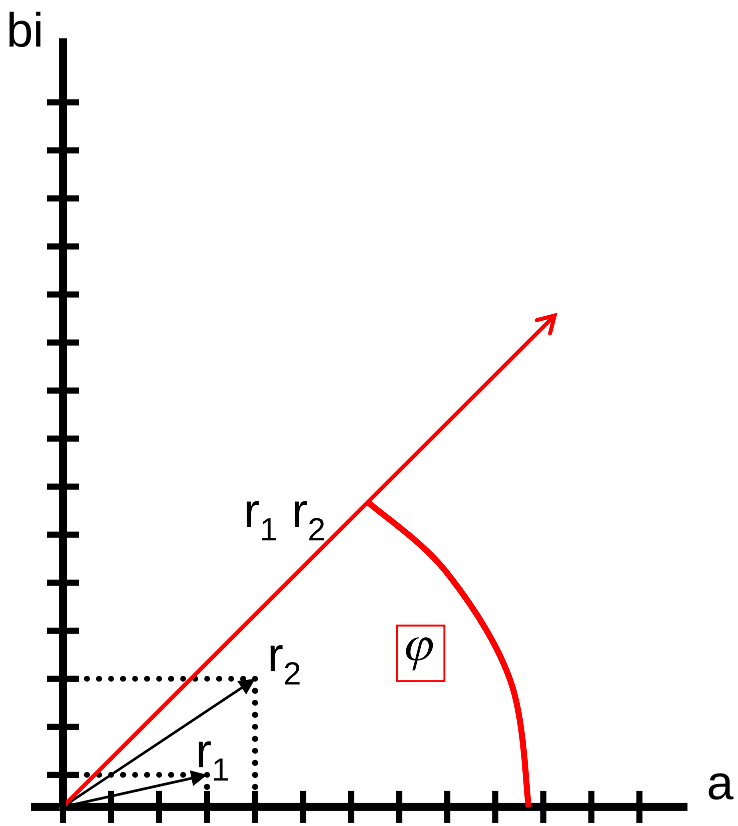
Wurzeln

Beim Rechnen mit Wurzeln ist größte Vorsicht angebracht, da die bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen hier nicht gelten. Egal, welchen der beiden möglichen Werte i oder – i man für $\sqrt{-1}$ festlegt, erhält man z.B.

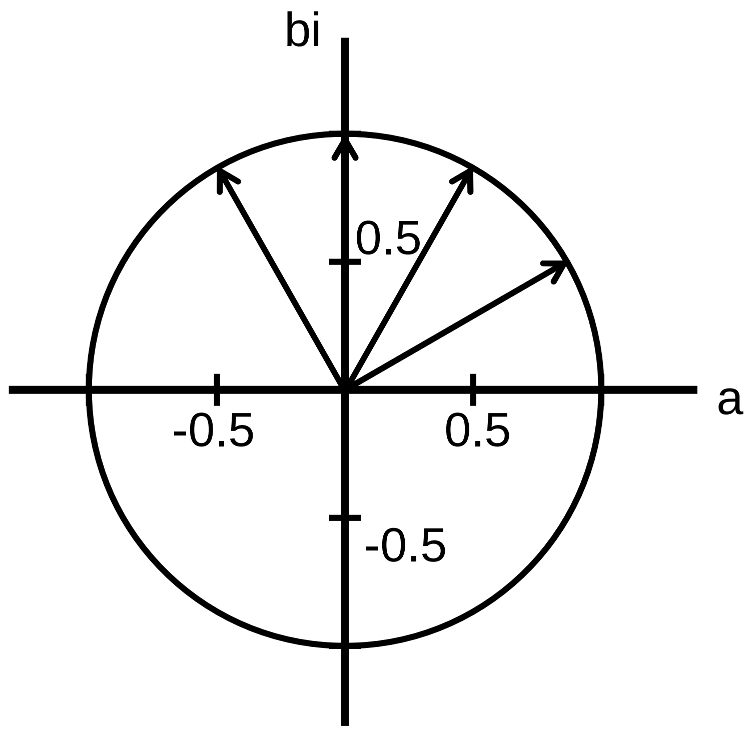
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \neq \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

Am einfachsten lassen sich die Berechnungen folgendermaßen durchführen:

- Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden (in der algebraischen Form) komponentenweise durchgeführt.
- Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.
- Bei der Division komplexer Zahlen werden ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert.
- Beim Potenzieren komplexer Zahlen werden ihre Beträge potenziert und ihre Argumente (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.
- Beim Radizieren (Wurzel ziehen) komplexer Zahlen werden ihre Beträge radiziert und ihre Argumente (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n-ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von $2\pi/n$ um den Ursprung der Gaußschen Ebene verteilt sind.



Potenz am Beispiel: $\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5i$



Die **eulersche Identität** bezeichnet die Formel

$$e^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi)$$

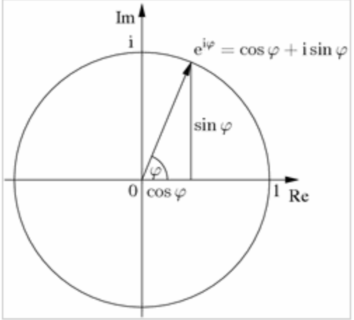
und bildet das Bindeglied zwischen trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen. Dabei bezeichnet *e* die eulersche Zahl (Basis des natürlichen Logarithmus) und i die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.

Die Gleichung erscheint in Leonhard Eulers *Introductio*, veröffentlicht in Lausanne 1748 unter der Voraussetzung $\varphi \in \mathbb{R}$ (aus der Anschauung wird klar, dass φ auch Winkel genannt wird), sie gilt jedoch auch für alle komplexen Argumente $\varphi \in \mathbb{C}$.

Für den Winkel $\varphi = \pi$ (die Kreiszahl) ergibt sich die Identität

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1\,,$$

die einen verblüffend einfachen Zusammenhang zwischen der Eulerschen Zahl e, der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen und der Kreiszahl π herstellt.



Veranschaulichung in der komplexen Zahlenebene

Richard Feynman nannte diese Gleichung in seinem Notizbuch die "bemerkenswerteste Formel der Welt", andere nennen sie die *schönste Formel der Mathematik*. Spötter sagen, diese Formel besage nichts anderes als: "Wenn man sich umdreht, schaut man in die andere Richtung."

Exkurs: Herleitung

1707 wurde Leonhard Euler als der älteste Sohn des Pfarrers Paul Euler geboren. Er besuchte das Gymnasium in Basel und nahm gleichzeitig Privatunterricht beim Mathematiker Johannes Burckhardt. Ab 1720 studierte er an der Universität Basel und hörte hier Vorlesungen von Johann Bernoulli. 1723 erlangte er durch einen Vergleich der Newtonschen und Kartesischen Philosophie in lateinischer Sprache die Magisterwürde. Seinen Plan, auch Theologie zu studieren, gab er 1725 auf. Am 17. Mai 1727 berief ihn Daniel Bernoulli an die Akademie St. Petersburg. Hier traf er auf Christian Goldbach. 1730 erhielt Euler die Professur für Physik und schließlich 1733 als Nachfolger von Daniel Bernoulli die Professur für Mathematik.

Er bekam in den folgenden Jahren immer stärkere Probleme mit seinem Augenlicht und ab 1740 war eines seiner Augen blind.

1741 holte ihn Friedrich der Große an die Berliner Akademie. Euler korrespondierte und verglich seine Theorien weiterhin mit Christian Goldbach. Nach 25 Jahren in Berlin kehrte er 1766 zurück nach St. Petersburg.

1771 erblindete er total. Trotz dessen entstand fast die Hälfte seines Lebenswerks in der zweiten Petersburger Zeit. Hilfe erhielt er dabei von seinen beiden Söhnen Johann Albrecht und Christoph. 1783 starb er an einer Hirnblutung.

Werk

Euler war extrem produktiv: Insgesamt gibt es 886 Publikationen von ihm. Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z. B. e, π, *i*, Summenzeichen ∑, f(x) als Darstellung für eine Funktion). 1744 gibt er ein Lehrbuch der Variationsrechnung heraus. Euler kann auch als der eigentliche Begründer der Analysis angesehen werden. 1748 publiziert er das Grundlagenwerk *"Introductio in analysin infinitorum"* in dem zum ersten Mal der Begriff der *Funktion* die zentrale Rolle spielt.

In den Werken *"Institutiones calculi differentialis"* (1765) und *"Institutiones calculi integralis"* (1768-1770) beschäftigt er sich außer mit der Differential- und Integralrechnung unter anderem mit Differentialgleichungen, Differenzengleichungen, elliptischen Integralen, sowie auch mit der Theorie der Gamma- und Betafunktion. Andere Arbeiten setzen sich mit Zahlentheorie, Algebra (z.B. *"Vollständige Anleitung zur Algebra"*, 1770), angewandter Mathematik (z.B. *"Mechanica, sive motus scientia analytica exposita"*, 1736 und *"Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum"*, 1765) und sogar mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auseinander (z.B. Rentenrechnung, Lotterien, Lebenserwartung).

Richard Feynman

Richard Phillips Feynman [ˈfaɪnmən] (* 11. Mai 1918 in New York; † 15. Februar 1988 in Los Angeles) war ein US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisträger des Jahres 1965.

Feynman gilt als einer der großen Physiker des 20. Jahrhunderts, der wesentliche Beiträge zum Verständnis der Quantenfeldtheorien geliefert hat. Zusammen mit Sin-Itiro Tomonaga und Julian Schwinger erhielt er 1965 den Nobelpreis für seine Arbeit zur Quantenelektrodynamik (QED). Seine anschauliche Darstellung quantenfeldtheoretischer elementarer Wechselwirkungen durch Feynman-Diagramme ist heute ein de-facto Standard.

Für Feynman war es immer wichtig, die interessanten, aber unanschaulichen Gesetzmäßigkeiten der Quantenphysik dem Laien und Studenten nahezubringen und verständlich zu machen. An Universitäten ist seine Vorlesungsreihe (*The Feynman Lectures on Physics*) weit verbreitet. In dem Buch *QED. Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie* wendet er sich an ein breiteres Publikum.

There's Plenty of Room at the Bottom

From Wikipedia, the free encyclopedia.

In 1959, Richard Feynman gave the first talk on nanotechnology, entitled ***There's Plenty of Room at the Bottom***[1]. He considered the possibility of direct manipulation of individual atoms as a more powerful form of synthetic chemistry.

Feynman considered a number of interesting ramifications of a general ability to manipulate matter on an atomic scale. He was particularly interested in the possibility of denser computer circuitry and microscopes that could see things much smaller than is possible with scanning electron microscopes. Researchers at IBM created today's atomic force microscopes, scanning tunneling microscopes, and other examples of probe microscopy and storage systems such as Millipede.

Fundamentalsatz der Algebra:

Sei

$$P(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot z^n$$

ein nicht konstantes Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$ mit komplexen Koeffizienten, d.h. $a_n \in \mathbb{C}$, mindestens ein $a_n, n > 0$ ist von Null verschieden. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d.h. eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, so dass $P(z) = 0$ gilt. Genauer gilt sogar, dass die Anzahl der Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, insgesamt gleich dem Grad des Polynoms ist.

Beispiel:

Die Polynomgleichung

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 13x^2 = 0$$

hat die Lösungen

$$\mathbb{L} = \{0^{(2)}, 1, 2 - 3i, 2 + 3i\}$$

die natürlich die Nullstellen des Polynomes sind. Die Lösung 0 wird dabei doppelt gezählt, was aus der zerlegten Form des Polynomes ersichtlich ist:

$$P(x) = x \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2 + 3i) \cdot (x - 2 - 3i)$$

Man verwendet auch die Sprechweise "0 tritt mit Vielfachheit 2 auf", alle anderen Nullstellen treten mit Vielfachheit 1 auf. Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Nullstellen im allgemeinen nicht (alle) reell sind, selbst wenn das Polynome reelle Koeffizienten hat.

Da man die zu den Nullstellen gehörenden Linearfaktoren abspalten kann, zerfällt somit jedes nicht konstante Polynom über $\mathbb{C}$ komplett in ein Produkt aus Linearfaktoren:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot z^n = \prod_{i=0}^{k} (z - z_i),$$

wobei die z_i die Nullstellen des Polynoms sind (Der Beweis dieser Tatsache erfordert etwas Algebra).

Komplexe Nullstellen treten bei Polynomen mit reellen Koeffizienten immer paarweise konjugiert auf, d.h. ist $\lambda = x + iy$ Nullstelle, so auch $\overline{\lambda} = x - iy$. Beweis:
Mit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ und $f(\lambda) = 0$ ist $f(\overline{\lambda}) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \overline{\lambda}^\nu = \overline{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \lambda^\nu} = \overline{f(\lambda)} = \overline{0} = 0.$

Beweis:

Der erste vollständige Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra wurde 1799 von Gauß im Rahmen seiner Dissertation angegeben. Inzwischen kennt man mehrere sehr unterschiedliche Beweise, die Begriffe und Ideen aus Analysis, Algebra oder Topologie beinhalten. Trotz seines Namens kann der Satz nicht mit rein algebraischen Methoden bewiesen werden, da er eine Aussage über den Körper $\mathbb{C}$ macht - und dieser ist ein Konstrukt der Analysis. Am einfachsten kann der Fundamentalsatz der Algebra mit Methoden der Funktionentheorie bewiesen werden.

Beweis mit Methoden der Funktionentheorie

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom positiven Grades. Wegen $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ exisitiert ein $R > 0$ mit $|f(0)| \le |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0)$. Weil $|f|$ stetig und $\overline{U_R(0)}$ kompakt ist, existiert nach dem Satz von Weierstrass eine Stelle $z_0 \in \overline{U_R(0)}$ mit $C := |f(z_0)| \le |f(z)|$ für alle $z \in \overline{U_R(0)}$. Wegen $C \le |f(0)|$ ist $C \le |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wäre $C > 0$, so wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und durch $\frac{1}{C}$ beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant.

Gauß war Sohn einfacher Leute. Die Mutter Gauß, eine nahezu analphabetische, jedoch in hohem Grade intelligente Tochter eines armen Steinmetzes, arbeitete als Dienstmädchen, bevor sie die zweite Frau von Gauß' Vater wurde. Dieser war Gärtner, Vorarbeiter, Kaufmannsassistent und Schatzmeister einer kleinen Versicherungsgesellschaft. Den Anekdoten nach soll Carl Friedrich als dreijähriger bereits den Vater bei der Lohnabrechnung korrigiert haben. C. F. Gauß sagte später, er habe das Rechnen vor dem Reden gelernt. Sein Leben lang behielt er die Gabe, die kompliziertesten Rechnungen im Kopf auszuführen.

Carl Friedrich Gauß

Mit neun Jahren wurde Gauß in der Schule Martino-Katharineum die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu summieren. Er hatte sie nach kurzer Zeit gelöst, indem er 50 Paare der Summe 101 bildete (1 + 100, 2 + 99, ..., 50 + 51) und 5050 als Ergebnis erhielt. Die daraus entstandene Formel wird gelegentlich auch als „der kleine Gauß" bezeichnet.

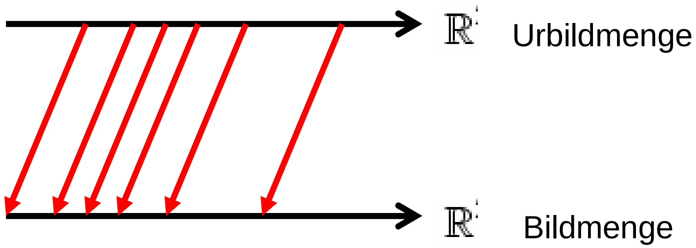
Gauß misstraute bereits mit zwölf Jahren der Beweisführung in der elementaren Geometrie und ahnte mit 16 Jahren, dass es neben der euklidischen noch eine andere Geometrie geben muss (Nichteuklidische Geometrie).

Schon früh erkannten seine Lehrer Büttner und dessen Assistent Martin Bartels die außergewöhnliche mathematische Begabung und machten den Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig auf das Wunderkind aufmerksam. Dieser unterstützte Gauß ab dessen 14. Lebensjahr finanziell und sorgte für seinen Lebensunterhalt. So konnte Gauß von 1792 bis 1795 am Collegium Carolinum, dem Vorgänger der heutigen Technischen Universität in Braunschweig, studieren. Mit 18 Jahren wechselte er an die Universität Göttingen. Im Alter von 19 Jahren gelang es Gauß als Erstem, das regelmäßige 17-Eck nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Eine sensationelle Entdeckung – seit der Antike gab es auf diesem Gebiet kaum noch Fortschritte. Dies war mit ein Grund, sich gegen Sprachen und Philosophie und für das Studium der Mathematik zu entscheiden, das er mit einer Doktorarbeit an der Universität Helmstedt, der Academia Julia, im Jahr 1799 abschloss.

Komplexe Funktionen

Die allgemeine Funktion geht vom Körper der komplexen Zahlen in den Körper der komplexen Zahlen, also von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$
D.h. es wird eine Zahlenebene auf eine andere abgebildet, im Gegensatz zu Abbildungen in $\mathbb{R}$ bei denen ein Zahlenstrahl auf einen anderen abgebildet wird.

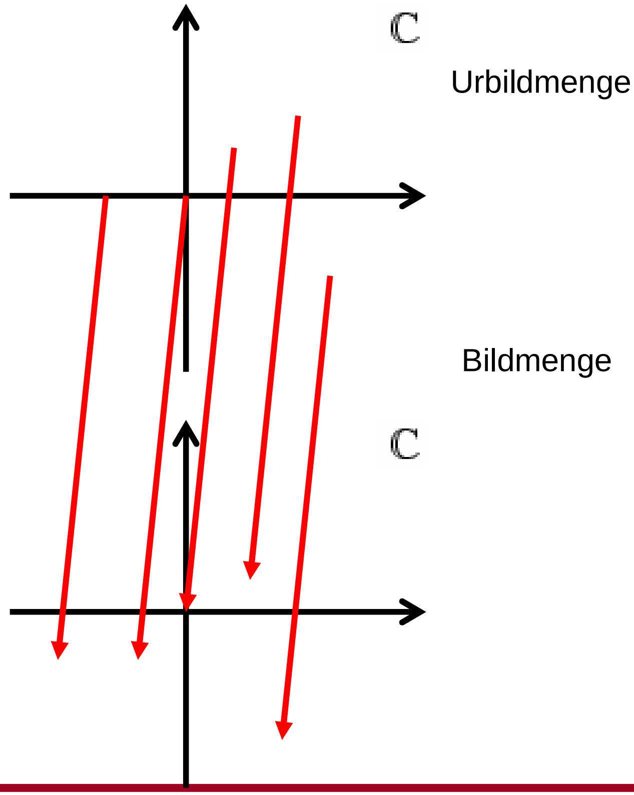
Beispiel in $\mathbb{R}$: x->x-3



Um eine Abbildung in $\mathbb{C}$ zu erfassen, bieted es sich an zunächst die Reelle Achse im Komplexen auf die komplexe Ebene abzubilden, dies ist dann eien Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$

Es gibt auch Abbildungen die die komplexe Ebene auf einen Teilraum der komplexen Ebene, z. B. die reelle Achse also z.B. $\mathbb{C}$ -> $\mathbb{R}$: z->zz* $\in \mathbb{R}$

Beispiel in $\mathbb{C}$: z->z-3-i



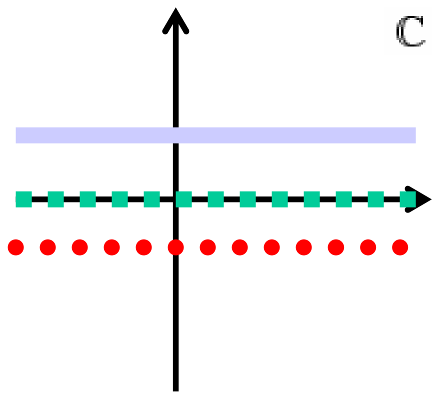
Die Funktion e^{iz} bildet vom Komplexen ins Komplexe ab. Ein Verständniss für ihre Abbildung läßt sich dadurch leicht erreichen, wenn man von der komplexen Zahlenebene a+bi abbildet, indem man Teilmengen abbildet. Diese Teilmengen können am einfachsten Geraden sein, die parallel zur reellen Achse laufen:

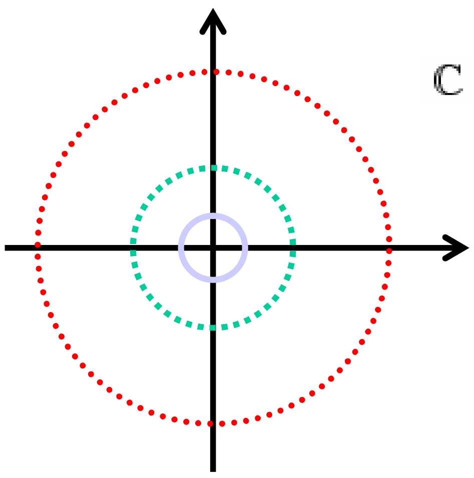
$$f(z) = e^{iz} = e^{i(a+bi)} = e^{-b}e^{ia}$$

Reelle Achse: b=0 => Abbildung auf Einheitskreis nach Definition, siehe oben $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Parallele Achse zur Reellen im komplex positiven: z.B. b=0.5 => Abbildung auf um e^{-b} geschrumpftem Einheitskreis

Parallele Achse zur Reellen im komplex negativen: z.B. b=-0.5 => Abbildung auf um e^{b} gestreckten Einheitskreis

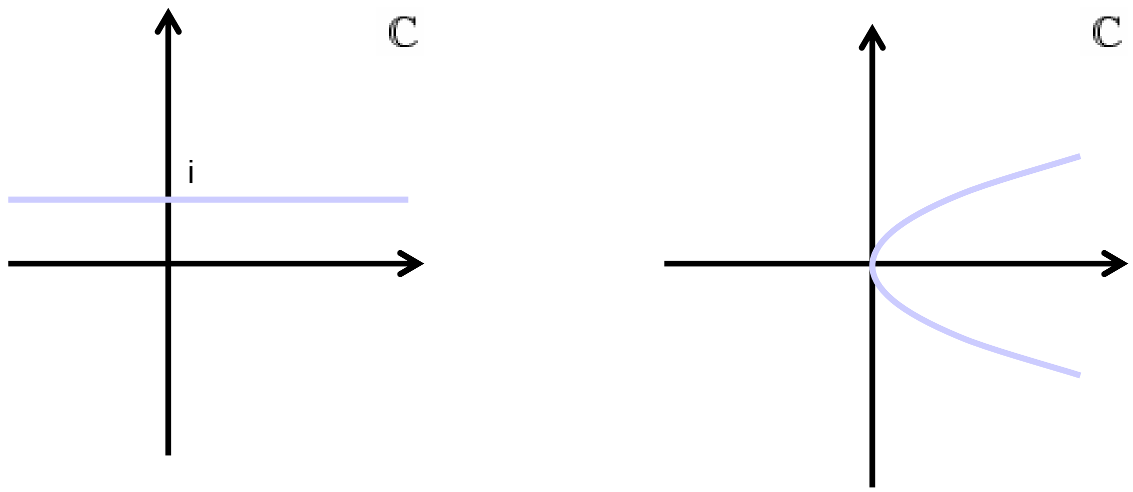




Einfaches komplexes Polynom:

$$f(z) = z^2 + 1 = (a + bi)^2 + 1 = a^2 - b^2 + 1 + 2abi$$

Gerade Paralel zur Achse wird: $a^2 - 1^2 + 1 + 2a1i = a^2 + 2ai$



Achtung, komplexe Singularitäten -> Regelungstechnik