
Kapitel 13: Spezielle Funktionen

- **Deltafunktion**
- **Gammafunktion**
- **Fehlerfunktion**

Die Bezeichnung Delta-Funktion ist streng genommen falsch, obwohl sie weit verbreitet ist. Im selben ungenauen Sinne wird sie oft auch nach dem britischen Physiker Paul A. M. Dirac als Dirac-Funktion bezeichnet. Die Delta-Distribution (auch δ -Funktion; Dirac-Funktion, -Impuls, -Puls, -Stoß; Stoßfunktion; sowie Einheitsimpulsfunktion genannt) wird in der Naturwissenschaft durch ein kleines Delta δ dargestellt und symbolisiert eine spezielle Distribution, die in der Mathematik und Physik von grundlegender Bedeutung ist. Der zu bevorzugende Name lautet Delta-Distribution, da sie keine Funktion im herkömmlichen Sinn ist.

Anschauliche Definition:

Die Delta-Distribution soll eine Funktion darstellen, die folgendermaßen definiert ist:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Die Stammfunktion der δ - Funktion ist die Heaviside-Sprung-Funktion $\theta(t)$.

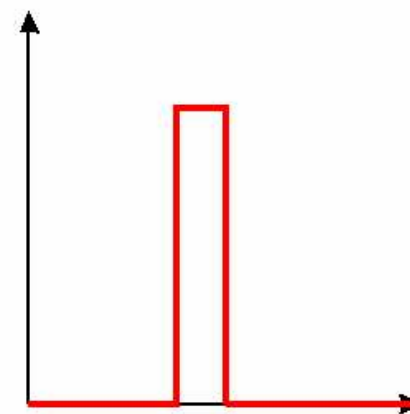
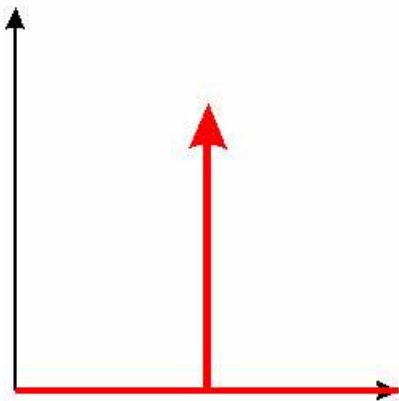
Die δ – Funktion ist genau genommen gar keine Funktion, sondern eine Distribution, die nur über ihr Integral definiert ist. Die Integration über eine δ -Funktion liefert 1, Integration über eine δ - Funktion multipliziert mit einer Funktion $f(x)$ liefert den Funktionswert $f(0)$ von f an der Stelle 0.

-> Tafel

Anschaulich stellt man sich die Delta-Distribution als eine beliebig hohe und beliebig schmale Funktion vor, deren Fläche den Grenzwert 1 besitzt. Am Ende dieses Gedankenexperiments erhält man einen Graphen, den man wegen der unendlichen Amplitude nicht mehr zeichnen kann. Der rote senkrechte Pfeil in der Abbildung deutet wie üblich an, dass sich die Linie in dieser Richtung unendlich fortsetzt.

Dieser Grenzwert, als Integral geschrieben, lautet (Diracsche Deltafunktion): $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Es existieren auch mehrdimensionale Dirac Distributionen, diese werden anschaulich zu mehrdimensionalen Keulen mit dem Volumen 1.



Der Begriff der Distribution ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der reellwertigen Funktion. Er wurde Mitte des 20. Jahrhunderts von Laurent Schwartz geprägt, der für seine Untersuchung von Distributionen die Fields-Medaille erhielt. Entwickelt wurden Distributionen, um gewisse singuläre Objekte der Physik mathematisch behandeln zu können. So ist beispielsweise die Delta-Distribution geeignet, um singuläre Phänomene wie etwa eine Punktmasse oder elektromagnetische Punktladung mathematisch zu beschreiben: Die räumliche Dichtefunktion eines Massenpunktes mit Einheitsmasse hat die Eigenschaft, dass sie fast überall verschwindet, außer an einem Punkt, an dem sie unendlich wird, da das Raumintegral über die Dichtefunktion 1 ergeben muss (Einheitsmasse). Es gibt keine reguläre Funktion, die diese Eigenschaften der Dichte erfüllt, wenn man aber das Integral als Funktional auffasst, kann man die Dichte als Delta-Distribution beschreiben.

Distributionen sind heutzutage ein unentbehrliches Mittel in vielen Gebieten der Mathematik, Physik und Elektrotechnik, zum Beispiel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sowie der Fourieranalyse, die wiederum eine prominente Rolle in der Quantenelektrodynamik und der Signalverarbeitung spielen.

Definition von Distributionen:

Eine Distribution T ist eine lineare und stetige Abbildung eines Testfunktionenraums auf die reellen Zahlen. Das bedeutet, dass eine Distribution eine Abbildung ist, die jeder Testfunktion eine Zahl zuordnet. Diese Zuordnung muss linear und stetig sein.

Exakte Definition

Man kann sich leicht überzeugen, dass es keine (reelle) Funktion gibt, die die obigen Bedingungen erfüllt. Deshalb ist eine exakte Definition nur im Rahmen der Theorie der Distributionen möglich. Eine Distribution ist ein lineares Funktional auf einer Menge der Testfunktionen, d.h. eine Distribution ordnet jeder Testfunktion eine Zahl zu. Die Delta-Distribution ist durch folgende Zuordnungsvorschrift gegeben:

$$\phi \rightarrow \phi(0) \quad \forall \phi$$

Der Wert, den die Delta-Distribution nach Anwendung auf eine Testfunktion liefert, schreibt man auch als $\delta(\phi) = \langle \delta, \phi \rangle$, bzw. in einer nicht ganz präzisen Art auch als

$$\int \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0)$$

Diese Schreibweise ist nicht richtig, weil die Delta-Distribution eigentlich nicht integrierbar ist. Wenn man allerdings diese Integral-Schreibweise akzeptiert mit dem Wissen, dass es eigentlich nur den Wert $\delta(\phi)$ bezeichnet, werden die obigen Formeln auch mathematisch richtig.

Eigenschaften:

- Faltungseigenschaft (Faltungssatz), auch Siebeigenschaft der Delta-Distribution genannt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

speziell für den Fall der konstanten Funktion 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$$

- Fouriertransformation: Sei \mathcal{F} die Fouriertransformation, dann gilt: $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$

Anschaulich bedeutet das, dass in der Delta-Distribution alle Frequenzen enthalten sind.

Laplace-Transformation: Sei \mathcal{L} die Laplace-Transformation, dann gilt: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

- Hintereinanderausführung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\phi(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

wobei x_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind (sofern $g(x)$ nur endlich viele und nur einfache Nullstellen hat).

- Skalierung $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$ D. h. die Delta-Distribution ist Homogen vom Grad - 1
- Rechenregel: $\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|} [\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha)]$

Eine in der Physik wichtige Darstellung der Delta-Distribution ist

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\sin(\kappa(x-a))}{\pi(x-a)},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur unter passender Faltung mit einer Testfunktion richtig wird. Sehr anschaulich ist zum Beispiel

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon}},$$

vorstellbar als eine Folge von Gaußverteilungen, deren Schwerpunkt bei a liegt und deren Höhe mit der Wurzel der fallenden Halbwertsbreite wächst. Das Gleichheitszeichen gilt wieder nur bei Faltung mit einer Testfunktion und formeller Vertauschung von Grenzwert und Integration vor allen anderen Rechnungen.

Darstellung mit Hilfe von "Lorentzkurven": $\delta(x - a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2}$,

wobei für das Gleichheitszeichen dasselbe wie bei den Gaußverteilungen gilt.

Ebenfalls eine gültige Darstellung der Delta-Funktion ist die Mesa-Darstellung:

die man sich als zwei Heavisidesche Sprungfunktionen darstellen kann, die sich in einem Abstand von $|\varepsilon|$ um den Punkt der Sprungfunktion befinden.

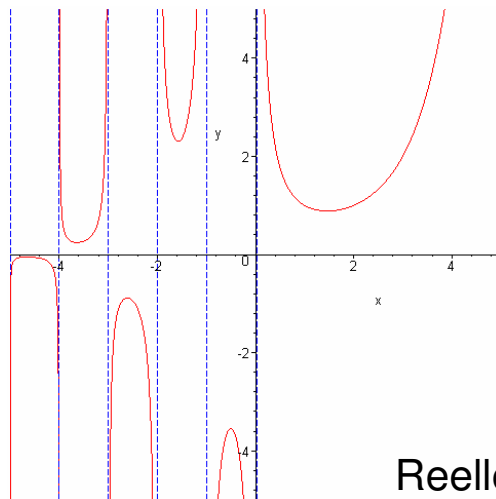
Die Gammafunktion ist in der Mathematik eine Funktion, die definiert wird als:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

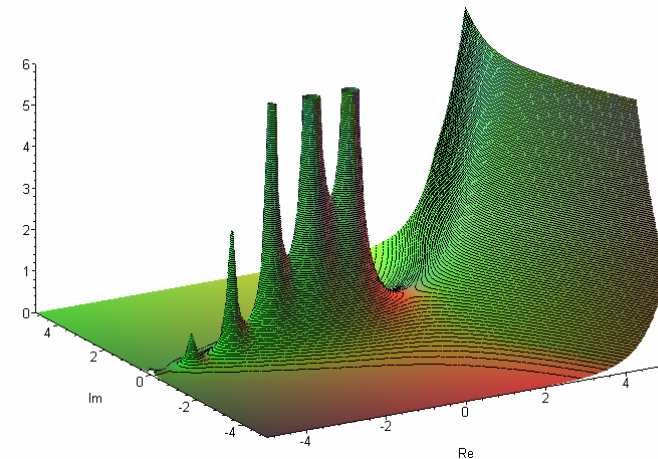
für $x > 0$. Sie erweitert die Fakultätsfunktion $n!$ auf die positiven reellen Zahlen und dient als Grundlage für die Definition der Gamma-Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie lässt sich als meromorphe Funktion auf die komplexe Zahlenebene mit einfachen Polen in den nichtpositiven ganzen Zahlen fortsetzen. Die Gammafunktion besitzt keine Nullstellen.

Für ganzzahlige positive Werte gilt: $\Gamma(n) = (n - 1)!$

was sich aus der Funktionalgleichung: $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ induktiv ergibt



Reeller Anteil



Betrag über der komplexen Ebene

Darstellungen der Gamma Funktion:

Eine weitere Ausweitung des Definitionsbereichs erlaubt die Darstellung der Gammafunktion nach Gauß:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Direkt aus der Gaußschen Darstellungsform abgeleitet ist diejenige von Karl Weierstraß:

$$\Gamma(x) = \left[x \cdot e^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-x/k} \right]^{-1},$$

wobei die Eulersche Konstante γ definiert ist als: $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$

Näherungswerte der Gammafunktion für $x > 0$ liefert die Stirlingsche Formel da

$$x! = \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \frac{x^{x+1/2}}{e^{x-\mu(x)}}$$

folgt für die Gamma Funktion:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \frac{x^{x-1/2}}{e^{x-\mu(x)}} \text{ mit } 0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}.$$

Die Fehlerfunktion (Error-Function) ist von zentraler Bedeutung für Berechnungen in der Statistik.

Die Fehlerfunktion $\text{erf}(z)$ ist das Integral der Gaußverteilung, gegeben durch:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$$

Für kleine reelle Werte erfolgt die Berechnung mit der Reihenentwicklung:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(x) = x \left(1 - x^2 \left(\frac{1}{3} - x^2 \left(\frac{1}{2} \left(\dots - x^2 / i \left(\frac{1}{2i+1} - \dots \right) \dots \right) \right) \right) \right)$$

für große reelle Werte mit der Kettenbruchentwicklung:

$$2e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erfc}(x) = 1 / \left(x + \frac{1}{2 / \left(x + \frac{1}{x + \frac{3}{2 / \dots / \left(x + \frac{i}{2 / \dots \right)} \right)} \right)} \right)$$