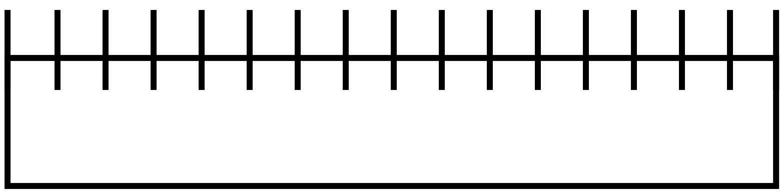
Kapitel 12: Fehlerrechnung: ungefähr genau

- Systematischer Fehler
- Gesetz der großen Zahlen
- Zufälliger Fehler
- Fehlerfortpflanzung
- Ausgleichsrechnung
- Berechnung von Warscheinlichkeiten
- Kombinatorik

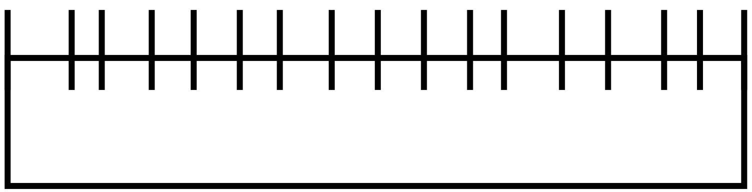
Fehlerrechnung

Die Fehlerrechnung verarbeitet die Fehler einer Messung bzw. eines Versuches. Das Messen einer physikalischen Größe, also der Vergleich einer physikalischen Größe mit einem metrologischen Standard, fällt letztlich immer fehlerhaft aus; d.h. Messungen sind mit Messfehlern behaftet. Die Differenz zwischen dem seitens des Standards realisierten Maß und dem wahren Wert der Messgröße ist der Messfehler. Z.B. kann bei einem Lineal nur bis zu millimetern Ablesen. Die wahre Größe (inkl. µm ect.) bleibt nicht ablesbar.
Allerdings ist der metrologische Standard selbst auch fehlerbehaftet. Messfehler sollten möglichst klein sein. Eine Messung wird jedoch kaum je perfekt sein, noch ließe es sich feststellen, wenn sie es wäre. Die Fehlerrechnung versucht, die Einflussnahme der Messfehler auf das Messergebnis quantitativ zu beschreiben. Dazu wird die Messunsicherheit bestimmt.

“exaktes Lineal”



“ungenaues Lineal”



Systematischer Fehler

Wenn der Vergleichsmaßstab nicht richtig kalibriert wurde oder bei der Messung nicht die wahre, zu messende Größe mit einem Vergleichsmaßstab verglichen wird, so spricht man von einem systematischen Fehler. Ist die Systematik bekannt, so kann man diesen Fehler durch eine Berechnung beseitigen.

Beispiel: Messung der Länge eines Tisches mit einem Lineal.

Falsche Kalibrierung: Lag das Lineal zu lange in der Sonne, so erwärmt es sich. Wenn nun die Messung durchgeführt wird, so misst man immer etwas falsches, weil das Lineal seine ursprüngliche Kalibrierung verloren hat. Ist nun aber die Temperatur des Lineals und dessen Wärmeausdehnungskoeffizient bekannt, so kann man diesen Fehler durch Zurückrechnen beseitigen.

Oft hat man es jedoch mit unbekannten systematischen fehlern zu tun. Ein Systematischer Fehler zeichnen sich dadurch aus, der er nicht zufällig ist.

Gesetz der großen Zahlen

Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

Beispiel: Wurf einer Münze:

Anzahl Würfe	davon Kopf		Verhältnis		absoluter Abstand	relativer Abstand
	theoretisch	beobachtet	theoretisch	beobachtet		
100	50	48	0.500	0.480	2	0.02
1000	500	491	0.500	0.491	9	0.009
10000	5000	4970	0.500	0.497	30	0.003

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze beim Werfen Kopf zeigt, betrage ½. Je häufiger die Münze geworfen wird, desto näher wird der Anteil der Würfe, bei denen Kopf erscheint, beim theoretischen Wert ½ liegen. Trotzdem kann der absolute Abstand zwischen dem theoretischen und dem tatsächlich beobachteten Ergebnis immer weiter anwachsen. Das Gesetz der großen Zahlen bedeutet also nicht, dass ein Ereignis, welches bislang nicht so häufig eintrat wie erwartet, seinen "Rückstand" irgendwann ausgleichen und folglich in Zukunft häufiger eintreten muss. Dies ist ein bei Roulette- und Lottospielern häufig verbreiteter Irrtum, die "säumige" Zahlenart müsse nun aber aufholen, um wieder der statistischen Gleichverteilung zu entsprechen.

Praktische Bedeutung:
Versicherungen: Das Gesetz der großen Zahl hat bei Versicherungen eine große praktische Bedeutung. Es erlaubt eine ungefähre Vorhersage über den künftigen Schadensverlauf. Je größer die Zahl der versicherten Personen, Güter und Sachwerte, die von der gleichen Gefahr bedroht sind, desto geringer ist der Einfluss des Zufalls.
Das Gesetz der großen Zahl kann aber nichts darüber aussagen, wer im einzelnen von einem Schaden getroffen wird. Unvorhersehbare Großereignisse und Trends wie der Klimawandel, die die Berechnungsbasis von Durchschnittswerten verändern, können das Gesetz zumindest teilweise unbrauchbar machen.

Eine Zufallsvariable oder Zufallsgröße ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet Stochastik. Man bezeichnet damit eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Werte zuordnet. Diese Werte werden als Realisationen der Zufallsvariable bezeichnet.

Betrachtet man ein Zufallsexperiment Münzwurf, so kann man beispielsweise eine Zufallsvariable X definieren, indem man dem Ergebnis ω = “die Münze zeigt Kopf“ den Wert 0 und dem Ergebnis ω = “die Münze zeigt Zahl“ den Wert 1 als Realisation zuordnet:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{die Münze zeigt Kopf} \\ 1 & \text{die Münze zeigt Zahl} \end{cases}$$

Als schwaches Gesetz der großen Zahlen wird die folgende Konvergenzaussage für eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ die alle denselben Erwartungswert μ besitzen, bezeichnet:

Das arithmetische Mittel von n Zufallsvariablen: $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$
konvergiert stochastisch gegen μ. Formal bedeutet dies: Für jede positive Zahl ε (beliebig klein) gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Ein schwaches Gesetz der großen Zahl gilt beispielsweise, wenn die Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ endliche Varianzen σ_1^2, $\sigma_{2,}^2$… haben, die zudem durch eine gemeinsame obere Grenze beschränkt sind, sowie unkorreliert sind.

Als starkes Gesetz der großen Zahlen wird die folgende Konvergenzaussage für eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mit Erwartungswert μ bezeichnet:

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

d. h., die repräsentative Stichprobe konvergiert fast sicher gegen μ. Das starke Gesetz der großen Zahlen impliziert das schwache Gesetz der großen Zahlen.
Ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt beispielsweise, wenn die Folge unabhängig ist und die Zufallsvariablen beschränkte Varianzen besitzen. Eine Form des starken Gesetzes der großen Zahlen für abhängige Zufallsvariablen ist der Ergodensatz.

Durch verschiedene Ereignisse tritt ein zufälliger Fehler ein. Bei Werkstücken ist dies die Tolleranz. Ermittelt man eine Größe x durch Mehrfachmessung, so ergibt sich der beste experimentell bestimmte Wert durch einfache Mittelwertsbildung (nach dem Gesetz d. großen Zahlen):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

N ist hier die Anzahl der Messungen und x_i der *i*-te Messwert.
Ein Maß für den Fehler, den man dabei macht, ist die sogenannte Standardabweichung für den Mittelwert:

$$\sigma_{\bar{x}} := \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Dieser geht aus der experimentell bestimmten Messunsicherheit, die man bei jeder einzelnen Messung im Mittel macht,

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

hervor, da sich der Fehler bei einer *N*-maligen Messung um das $\sqrt{N}$ -fache verringert. Der Faktor (N-1) wird hier verwendet, da man sonst bei einer einzelnen Messung und einem Vorfaktor von (N) einen Fehler von 0 erhalten würde, was offensichtlich nicht stimmen kann.

Treten zusätzlich weitere systematische Fehler Δx auf, so ergibt sich der Gesamtfehler zu

$$u_{\bar{x}} = t\sigma_{\bar{x}} + \Delta x$$

angegeben. Die Unsicherheitsfaktoren sind Messwerte und besitzen somit ihrerseits einen Messfehler. Deswegen sollte man für typische Messungen den Fehler nur auf ein oder zwei geltende Ziffern angeben. Die Genauigkeit des Messwertes richtet sich nun nach dem bestimmten Fehler.

Beispiel: Fehler eines Messgerätes

Möchte man den typischen Fehler eines Messgerätes bestimmen, so benötigt man den relativen Fehler.

$$\frac{u_{\bar{x}}}{\bar{x}}$$

Der relative Fehler wird oft in Prozent oder Promille angegeben. Er ist weitestgehend unabhängig von dem Messwert.

Zufälliger Fehler

Bei den Zentralen Grenzwertsätzen handelt es sich um eine Familie schwacher Konvergenzaussagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Allen gemeinsam ist die Aussage, dass die (normierte) Summe einer großen Zahl von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen annähernd (standard)normalverteilt ist. Dies erklärt auch die Sonderstellung der Normalverteilung. Die Gauß- oder Normalverteilung (nach Carl Friedrich Gauß) ist ein wichtiger Typ kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gauß-Kurve, Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt.

Viele natur-, wirtschafts- und ingenieurswissenschaftliche Vorgänge lassen sich durch die Normalverteilung entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben (vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken).

Zufallsgrößen mit Normalverteilung benutzt man zur Beschreibung zufälliger Versuche bei der Bestimmung von Geschwindigkeiten, Meßfehler, Beobachtungsfehler wie:

* zufällige Beobachtungs- und Meßfehler.
* zufällige Abweichungen vom Nennmaß bei der Fertigung von Werkstücken.
* Beschreibung der Brownschen Molekularbewegung.

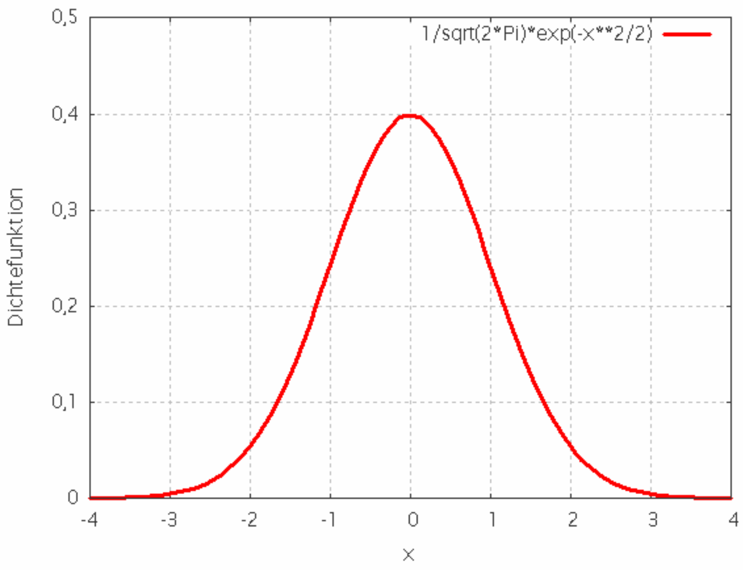
Eine stetige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt μ-σ normalverteilt, wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung sind.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist gegeben durch:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$$



Dichtefunktion einer Standardnormalverteilung. Angegeben sind die Intervalle im Abstand 1, 2 und 3 Standardabweichungen vom Erwartungswert 0, die rund 68%, 95,5% und 99,7% der Fläche unter der Glockenkurve umfassen. Die gleichen Prozentsätze gelten für alle Normalverteilungen in Bezug auf die entsprechenden Erwartungswerte und Standardabweichungen. Die Normalverteilung ist eine Grenzverteilung, die nicht direkt beobachtet werden kann. Die Annäherung verläuft aber mit wachsendem n sehr schnell, so dass schon die Verteilung einer Summe von 30 oder 40 unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen einer Normalverteilung recht ähnlich ist..

Wichtig ist, dass die gesamte Fläche unter der Kurve gleich 1 ist, also der Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses entspricht. Somit folgt, dass wenn zwei Gauß'sche Glockenkurven dasselbe μ, aber unterschiedliche σ-Werte haben, jene Kurve mit dem größeren σ breiter und niedriger ist (da ja beide zugehörigen Flächen jeweils den Wert von 1 haben und nur die Standardabweichung (oder „ Streuung") höher ist). Zwei Glockenkurven mit dem gleichen σ, aber unterschiedlichen μ haben gleich aussehende Graphen, die jedoch auf der x-Achse um die Differenz der μ - Werte zueinander verschoben sind. Das Integral der Verteilungsfunktion ist nicht auf eine elementare Stammfunktionen zurückführen!

Die Gaußsche Normalverteilung lässt sich auch zur Beschreibung nicht direkt stochastischer Sachverhalte verwenden, etwa in der Physik für das Amplitudenprofil der Gaußstrahlen und andere Verteilungsprofile.

Die Normalverteilung ist invariant gegenüber der Faltung, d. h. die Faltung einer Gaußkurve der Halbwertsbreite Γ_a mit einer Gaußkurve der Halbwertsbreite Γ_b ergibt wieder eine Gaußkurve mit der Halbwertsbreite $\Gamma_a^2 = \Gamma_b^2 + \Gamma_c^2$. Anders gesprochen, die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen ist wieder normalverteilt.

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist ein Fixpunkt der Fourier-Transformation, d.h. die Fourier-Transformierte einer Gaußkurve ist wieder eine Gaußkurve. Das Produkt der Standardabweichungen dieser korrespondierenden Gaußkurven ist konstant; es gilt die Heisenbergsche Unschärferelation.

Der Einfluss einer fehlerbehafteten Messgröße x auf das Endergebnis y kann abgeschätzt werden (Taylor-Entwicklung), indem man das Endergebnis als Funktion von der fehlerbehafteten Größe betrachtet, nach dieser ableitet und mit dem absoluten Fehler der fehlerbehafteten Größe multipliziert:

$$y = y(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta y \approx \left|\frac{dy}{dx}\right| \cdot \Delta x$$

Fließt x oder sein Kehrwert $\frac{1}{x}$ in *m*-ter Potenz (also z.B. quadratisch für m = 2) in das Endergebnis ein, so ist der dadurch verursachte relative Fehler von y gleich dem relativen Fehler von x multipliziert mit m:

$$y = c \cdot x^{\pm m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{y} = m \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

mehrere fehlerbehaftete Größen:

Fließen mehrere fehlerbehaftete Größen x_i bei der Ermittlung von y ein, so werden all deren Einflüsse den Gesamtfehler der Messung bestimmen. Sind die Fehler der Messgrößen x unabhängig voneinander (zufällige Fehler), addiert man die einzelnen Fehlerbeiträge quadratisch:

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \Delta y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \Delta x_i^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \Delta x_i^2}$$

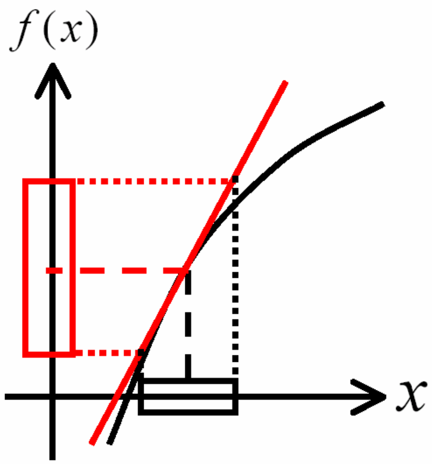
Fehlerfortpflanzung

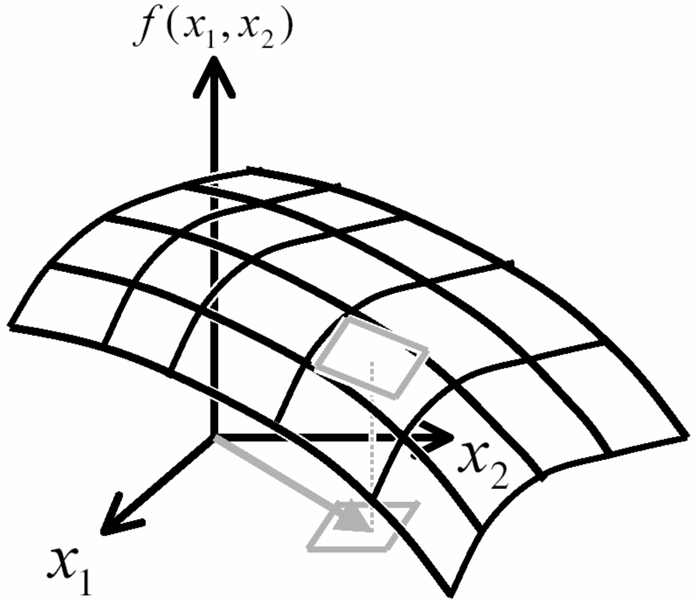
Handelt es sich bei den ursprünglichen Fehlern um zufällige Fehler, so werden die einzelnen Fehler aufsummiert:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \cdot \Delta x_i$$

Δy : Gesamtfehler nach Fehlerfortpflanzung
x_i : Messgröße
Δx_i : Fehler der Messgröße x_i
y : Formel zur Berechnung der Größe y aus den Messgrößen x

Anschaulich:





Grenzen des Gauß-Fortpflanzungsverfahrens

Das Gauß-Verfahren ist nur anwendbar, wenn sich die Modellfunktion $y = f(x_i)$ bei Änderungen der Einflussgrößen x_i im Bereich ihrer Standardunsicherheiten $u(x_i)$ hinreichend linear verhält. Ist dies nicht der Fall, ist das Rechenverfahren erheblich aufwendiger.
DIN 1319 (Grundlagen der Meßtechnik) und der „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ geben Hinweise, wie eine unzulässige Nichtlinearität zu erkennen und zu umgehen ist.

GUM ist die Abkürzung für den 1993 veröffentlichten ISO/BIPM-Leitfaden „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“. 1995 wurde er mit einem Korrekturblatt versehen. Er ist auch in einer Deutschen Fassung des DIN erhältlich, als Vornorm DIN V ENV 13005, Ausgabe:1999-06 (Neuauflage der ersten Übersetzung von 1995 als Deutsche Vornorm); diese Vornorm trägt den Titel: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen; Deutsche Fassung ENV 13005:1999.

Ausgleichsrechnung

Unter einer Ausgleichungsrechnung versteht man die Schätzung von unbekannten Parametern eines mathematischen Modells. Im einfachsten Fall hat eine Ausgleichsrechnung zum Ziel, eine größere Anzahl empirischer Daten näherungsweise durch eine glatte Kurve zu beschreiben.

In der Sprache der Approximationstheorie ist es die Schätzung von unbekannten Parametern eines mathematischen Modells nach der Methode der kleinsten Quadrate. Im einfachsten Fall hat eine Ausgleichsrechnung zum Ziel, eine größere Anzahl empirischer Daten durch eine glatte Kurve zu beschreiben und die Restfehler (Residuen) zu minimieren.

Ausgleichsgerade:
Ein häufiges Problem ist in der Materialwissenschaft wie in jeder Naturwissenschaft das Aproximieren (anpassen, fitten,...) einer Ausgleichsgeraden an eine Datenmenge.

$$p(t) = u + vt$$

Die Daten sind hierbei gegeben durch (t_i, f_i), i=1,...,n. Die bestmögliche Approximation beruht in diesem Fall auf der Methode der kleinsten Quadrate (vergl. Kapitel 6), also Minimierung der Fehlerquadratsumme:

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

Für Achsenabschnitt u und die Steigung v ergeben sich:

$$u = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}$$

$$v = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} t_i f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}$$

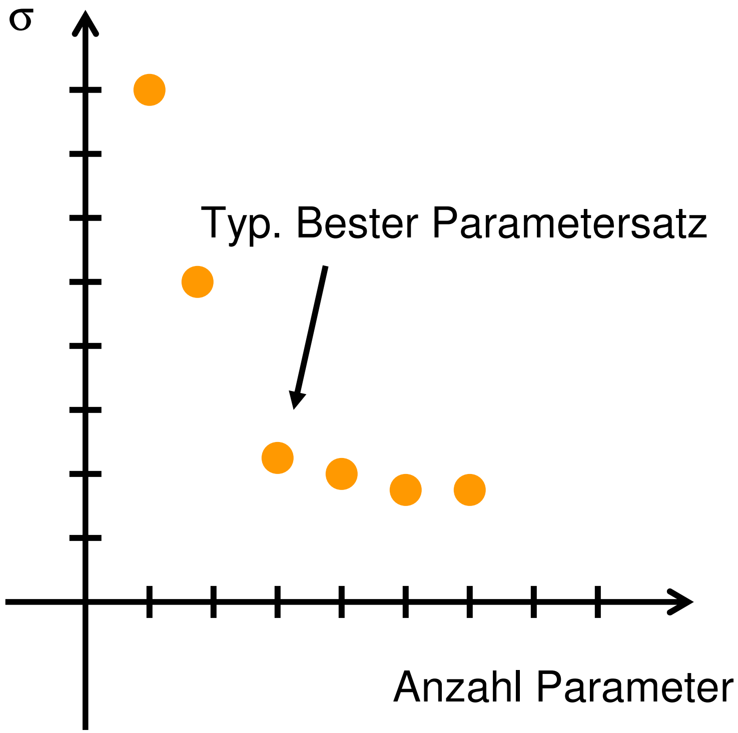
Beweis: http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung300/

Prinzipiell läßt sich das Verfahren für andere Kurven ebenso durchführen, nur das die Anzahl der zu bestimmenden Parameter größer wird. So wird eine Parabel im Allgemeinen durch 3 Parameter approximiert. Dies kann aber problematisch werden, wenn unbekannt ist, um welche Funktion es sich überhaupt handeln soll. Wie in Kapitel 6 schon erwähnt, kann man Informationen über die Art des Zusammenhangs erhalten, indem man eine Messreihe y durchführt: Es werden zu verschiedenen Werten der unabhängigen Variablen t_j entsprechende y-Werte erhoben. Nun wird versucht, die y-Werte mit einer Modellfunktion

$$y_m = f(t_1, \ldots, t_q; x_1, \ldots, x_p)$$

die von den q Variablen sowie p zusätzlichen Parametern abhängen soll, gut zu approximieren.

Natürlich ist dabei die Approximation immer besser, je mehr Parameter verwendet werden. Es ergibt sich so sehr häufig die Frage, wie viele Parameter verwendet werden sollen. Dies führt zu einem eigenen Gebiet der Mathematik. Eine brauchbare Schätzung ergibt sich jedoch häufig, wenn eine Unterschiedliche Zahl von Parametern gefittet wird, und sie gegen die Abweichung aufgetragen wird. Auf diese Art kann man zu einer Parameterzahl kommen, ab der sich nur noch eine geringe Verbesserung erziehlen lässt:



Typisches Vorgehen bei einem Vesuch:

- Protokollieren der Messwerte
- Bestimmen der Messfehler durch das Instrument:
    - angegebene Toleranzen
    - letzte ablesbare Stelle
- Gibt es mehrere Messwerte und Mittelwertbildung?
    - Standardabweichung / Abweichung des Mittelwertes
- soll eine Gerade (Formel) bestimmt werden?
    - Methode der kleinsten Quadrate
    - graphische Interpolation durch Lineal
- Gibt es eine Formel in die fehlerbehaftete Größen eingehen?
    - Fehlerfortpflanzung

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten sind Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, bedingte Wahrscheinlichkeit und viele andere Begriffe zu unterschieden. Für das oben genannte Beispiel der Gaußkurve ergibt die Fläche unter der Kurve eines Intervalles von A bis B die Warscheinlichkeit an, das eine Zufallsvariable einen Wert innerhalb des Intervalles aufzeigt. **Wahrscheinlichkeiten** werden als Zahl zwischen 0 und 1 angegeben, wobei Null und Eins zulässige Wahrscheinlichkeiten sind. Ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 wird als unmöglich (Unmögliches Ereignis), eines mit Wahrscheinlichkeit 1 als sicher interpretiert (Sicheres Ereignis). Also ist das Integral über die gesammte Gaußkurve gleich 1.

In Anlehnung an obrige Darstellung lässt sich so die Standardabweichung eines “Gaußschen” Zufallsexperimentes angeben. Im diskreten Fall ist die Standartabweichung σ_x:

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$ Übergang zum Integral $$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}} = \sigma$$

(Tafel)

Für den Mittelwert bei kontinuierlichen Funktionen gilt analoges.

Fehler im Praktikumsprotokoll

http://www.fh-landshut.de/fb/mb/files/downloads/fehlerbetrachtung2.pdf

Psychologie - Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten:

Es wird oft behauptet, der Mensch besitze nur ein schlechtes Gefühl für die Wahrscheinlichkeit, man spricht in diesem Zusammenhang auch vom „Wahrscheinlichkeitsidioten“.
Beispiele:

- Die Wahrscheinlichkeit in Österreich im Lotto zu gewinnen entspricht in etwa der Wahrscheinlichkeit von einem Blitz erschlagen zu werden. Die Chance zu gewinnen wird aber oft viel höher eingeschätzt als die Gefahren eines Gewitters.

- Wenn man einen Regenschirm gefunden hat und irgendeine beliebige Menschen anruft, ist die Warscheinlickeit größer den Besitzer am Telefon zu haben als den Lottojackpot (~1:120000000) zu gewinnen.

- Das Geburtstagsparadoxon: Auf einem Fußballspielfeld sind 23 Personen. Die Wahrscheinlichkeit, dass hierunter mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist größer als 50 %.

Daher ist es sinnvoll, die Warscheinlichkeit zu berechnen => Kombinatorik

Kombinatorik

Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Bestimmung der

- Zahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen von
- unterscheidbaren oder nicht unterscheidbaren Objekten
- mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge

beschäftigt. Hiermit können also “Lottoprobleme” gelöst werden.

Definitionen:

Permutation (= Zahl der Reihenfolgen):

"Jede mögliche Anordnung von n Elementen, in der alle Elemente verwendet werden, heißt Permutation dieser Elemente.”

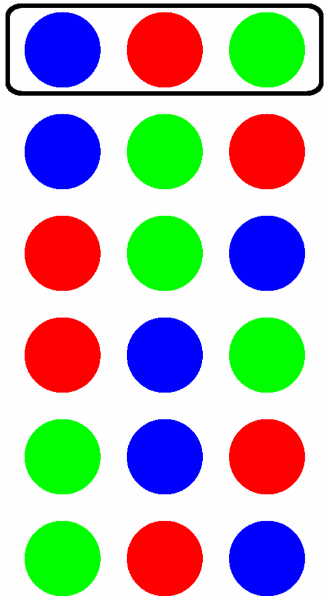
Variation: Auswählen unter Beachtung der Reihenfolge z.B. ABC<>BAC

Kombination: Auswählen ohne Beachtung der Reihenfolge z.B. ABC=BAC

Kombinatorik

Unterscheidbare Objekte mit Beachtung der Reihenfolge:

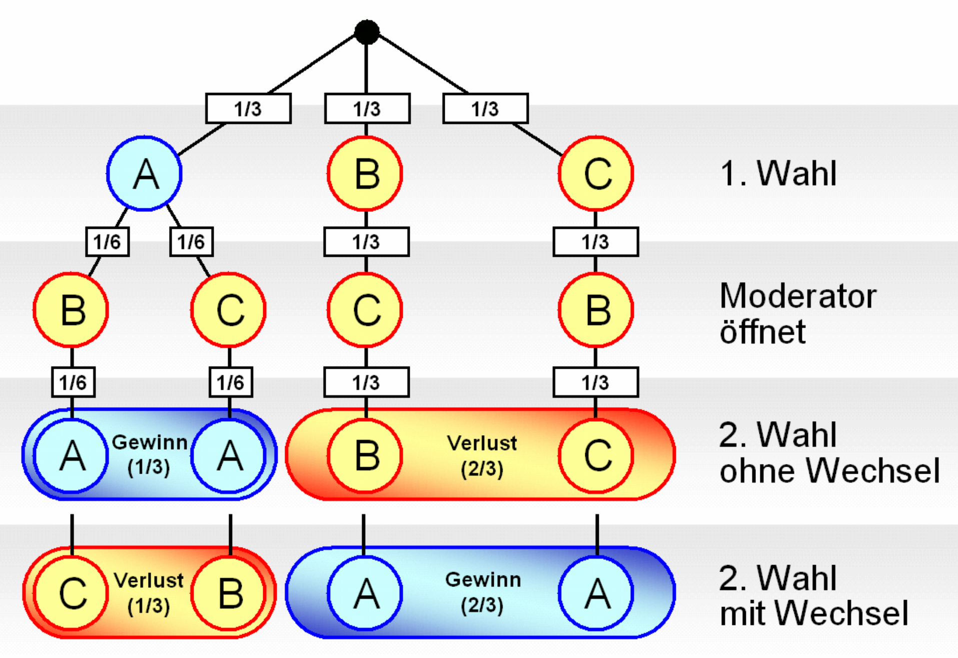
Als einführendes Beispiel mag die Zahl der Anordnungen von sechs unterscheidbaren Objekten mit Beachtung der Reihenfolge dienen. Offensichtlich kann jedes der Objekte "auf den ersten Platz gelangen", es gibt also sechs Möglichkeiten, den ersten Platz zu besetzen. Wenn der erste Platz besetzt ist, bleiben noch fünf Kandidaten für den zweiten Platz, ist auch dieser besetzt, nur noch vier Kandidaten für den dritten Platz, und so fort. Für den vorletzten Platz bleiben schließlich nur noch zwei Objekte übrig, und der letzte Platz muss mit dem "übrig gebliebenen" Objekt besetzt werden.
Es gibt also 6·5·4·3·2·1 oder 6! = 720 Möglichkeiten, sechs unterscheidbare Objekte anzuordnen. In nebenstehendem Beispiel handelt es sich um 3!
Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen: n!



Wenn den Kandidaten feste Plätze zugeordnet werden, und man wissen möchte, wieviele Möglichkeiten existieren, so dass sich kein einziger Kandidat auf seinen vorgesehenen Platz setzt, berechnet man das über die Subfakultät !n. Bei den sechs Kandidaten sind das !6 = 265 Möglichkeiten.

$$!n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Entscheidungsbäume sind eine spezielle Darstellungsform von Entscheidungsregeln. Sie veranschaulichen aufeinanderfolgende, hierarchische Entscheidungen. Sie beginnen mit einem Stamm, an dessen Ende sich eine Verzweigung befindet, die in mehrere - mit Wahrscheinlichkeiten versehene - wiederum verzweigte Äste führt. Jeder Endpunkt des Baums ist durch einen eindeutigen Weg erreichbar. Für die Kombinatorik erhält man so eine wertvolle Abzählhilfe. Dies kann am “Ziegenproblem” veranschaulicht werden:



Bei einer Spielshow soll der Kandidat eines von drei aufgebauten Toren auswählen. Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege, also Nieten (oder Trostpreise). Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:

1. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.
3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren?

Für die Zahl der möglichen Anordnungen von Objekten **aus mehreren Klassen**, die untereinander jeweils innerhalb einer Klasse nicht unterscheidbar sind, ist es hilfreich, zunächst die mögliche Zahl der Anordnungen der Objekte zu betrachten und dann zu überlegen, wieviele dieser Anordnungen nicht unterscheidbar sind. Die Zahl der möglichen Anordnungen bei unterscheidbaren Objekten wird durch die Zahl der nicht unterscheidbaren Anordnungen geteilt.

Wenn die mögliche Zahl von Anordnungen von zwei Objekten einer ersten Klasse, drei Objekten einer zweiten Klasse und fünf Objekten einer dritten Klasse ermittelt werden soll, dann gibt es zunächst (2 + 3 + 5)! oder 3.628.800 mögliche Anordnungen. Weil aber Anordnungen nicht unterscheidbar sind, bei denen nur Objekte einer Klasse untereinander den Platz getauscht haben, weil also jeweils 2! · 3! · 5! oder 1.440 der möglichen Anordnungen gleich erscheinen, gibt es nur 3.628.800/1.440 oder 2.520 unterscheidbare Anordnungen dieser Elemente. Allgemein:

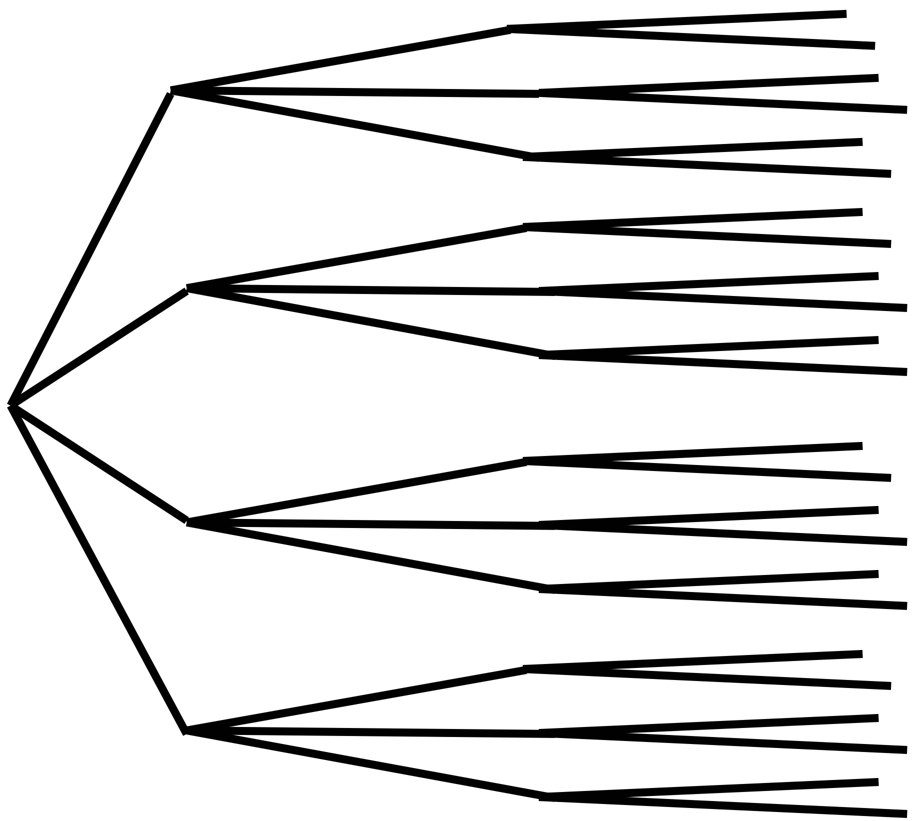
Anzahl der Permutationen von n Elementen, die in k Gruppen von je $l_1, l_2, ..., l_k$ gleichen

Elementen $(\sum_{i=1}^{k} l_i = n)$ fallen: $\frac{n!}{l_1! l_2! ... l_k!}$

Baumdiagramm ->Tafel

Variation ohne Zurücklegen

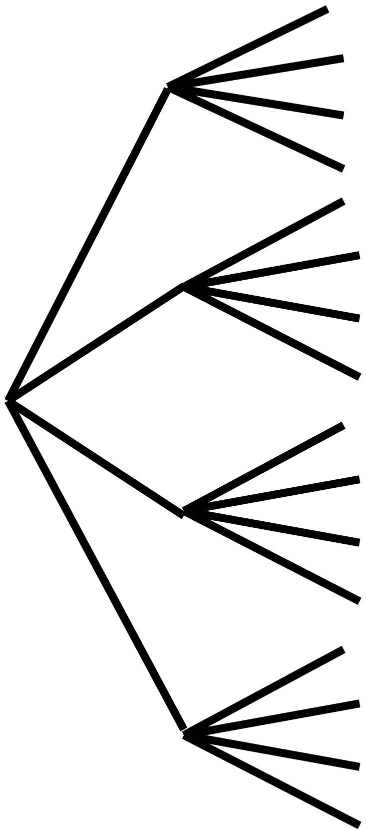
k Plätze sollen mit jeweils einem aus n Objekten besetzt werden, wobei jedes Objekt maximal einen Platz besetzen darf (also muss k<=n sein). Hier gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.



Baum für 3 Plätze mit 4 unterscheidbaren Dingen

Variation mit Zurücklegen

Wenn aus n Objekten k Objekte mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, dann kann jedes der n Objekte auf jedem der k Plätze der Auswahl erscheinen, es gibt demzufolge n^k mögliche Auswahlen.



Baum für 2 Plätze mit 4 unterscheidbaren Dingen

Kombination ohne Zurücklegen

Auswahlprobleme ohne Zurücklegen können als Anordnungsprobleme aufgefasst werden. Die Zahl der möglichen Auswahlen kann ermittelt werden, indem die Zahl der Anordnungen ermittelt wird, bei denen die ausgewählten Objekte auf ausgezeichneten Plätzen angeordnet sind.

Dieses Auswahlproblem kann auf die Ermittlung aller Anordnungen zurückgeführt werden, bei denen die ausgewählten Objekte auf den ersten Plätzen landen, wobei es weder bei den ausgewählten noch bei den nicht ausgewählten Objekten auf die Reihenfolge ankommt.

Wenn aus n Objekten k ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, so gibt es jeweils die Klasse der k ausgewählten Objekte und die Klasse der (n-k) nicht ausgewählten Objekte, in der es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Dabei sind k und n-k in der Formel austauschbar, da man die n Objekte in zwei Teilmengen teilt, welche davon die interessierende ist, ist für die Anzahl der möglichen Aufteilungen nicht entscheidend.

Demzufolge gibt es: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mögliche derartige Auswahlen.

Kombination mit Zurücklegen (Repetition): $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Übersicht

	Variation (Mit Beachtung der Reihenfolge) $\{a,b\} \neq \{b,a\}$	Kombination (Ohne Beachtung der Reihenfolge) $\{a,b\} = \{b,a\}$	Permutation $M = \{l_1\,a,\ l_2\,b,\ \ldots,\ l_k\,x\}$
mit Wiederholung (Mit Zurücklegen) $\{a,\ a,\ b\}$ **Binomialverteilung**	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n-1+k}{k}$	$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} l_i!} = \frac{n!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!}$
ohne Wiederholung (Ohne Zurücklegen) $\{a,\ b,\ c\}$ **Hypergeometrische Verteilung**	$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}\cdot k!$	$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$n!$

Große Zahlen

Ein verblüffendes Phänomen der Kombinatorik ist, dass sich oftmals wenige Objekte auf vielfältige Weise kombinieren lassen. Bei Rubiks Würfel können beispielsweise die 26 Elemente auf rund 43 Trillionen Arten kombiniert werden. Dieses Phänomen wird oft als Kombinatorische Explosion bezeichnet und ist auch die Ursache für das so genannte Geburtstagsparadoxon.

Geburtstagsproblem

Als Geburtstagsproblem (manchmal auch Geburtstagsparadoxon) wird die Tatsache bezeichnet, dass von 23 willkürlich ausgewählten Personen (zum Beispiel zwei Fußballmannschaften plus Schiedsrichter) mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben. Welcher Tag das ist, spielt dabei keine Rolle.

Im Gegensatz dazu steht die Wahrscheinlichkeit, dass jemand an einem ganz bestimmten Tag Geburtstag hat - wenn man sich zum Beispiel den Schiedsrichter nimmt und fordert, dass jemand mit genau ihm am selben Tag Geburtstag hat. Für diesen Fall sind 253 Personen notwendig, um eine Wahrscheinlichkeit von 50 % zu erreichen (siehe Binomialverteilung).

Der Grund für diesen großen Unterschied liegt darin, dass es bei n Personen n*(n-1)/2 verschiedene Paare gibt, die am selben Tag Geburtstag haben könnten. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beziehungsweise Kollidieren zweier Geburtstage steigt daher ungefähr mit dem Quadrat der Anzahl n an.

Vernachlässigt man Schaltjahre und nimmt man an, dass alle Geburtstermine gleich wahrscheinlich sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Tag Geburtstag zu haben:

$$P = \frac{1}{365} \approx 0{,}27\%$$

Da die Wahrscheinlichkeit für das Gegenteil (es gibt keine zwei Leute, die am selben Tag Geburtstag haben) unter einem bestimmten Schwellwert (in diesem Fall 50 %) liegen soll, muss über das Gegenereignis gerechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Tag nicht Geburtstag zu haben, ist

$$q = 1 - \frac{1}{365} \approx 99{,}73\%$$

Bei zwei unabhängigen Versuchen (die Geburtstage zweier Personen werden als unabhängig betrachtet) ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Treffer zu haben (am bestimmten Tag hat keiner von beiden Geburtstag): $Q = q^2$

Dabei mindestens einen Treffer zu haben (mindestens eine Person von zweien hat an einem bestimmten Tag Geburtstag), ist wieder die Gegenwahrscheinlichkeit, also: $P = 1 - q^2$

Allgemein ausgedrückt ist die Wahrscheinlichkeit P, mit der mindestens eine Person von n anwesenden Personen an einem bestimmten Tag Geburtstag hat:

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n$$

Damit lässt sich ausrechnen, wie viele Personen n man braucht, um eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zu erreichen, dass mindestens eine Person an einem bestimmten Tag Geburtstag hat:

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right)^n = 1 - P \Leftrightarrow n = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1 - \frac{1}{365})}$$

Für eine Wahrscheinlichkeit von 50 % benötigt man: $n \geq \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})} \approx 253$

Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen an einem Tag Geburtstag haben

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist für n Personen m = 365^n. Zum Beispiel ergeben sich für zwei Personen 365^2 = 133225 mögliche Kombinationen von Geburtstagen. Weiterhin ist die Anzahl der Fälle, in denen nur unterschiedliche Geburtstage vorkommen,

$$u = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

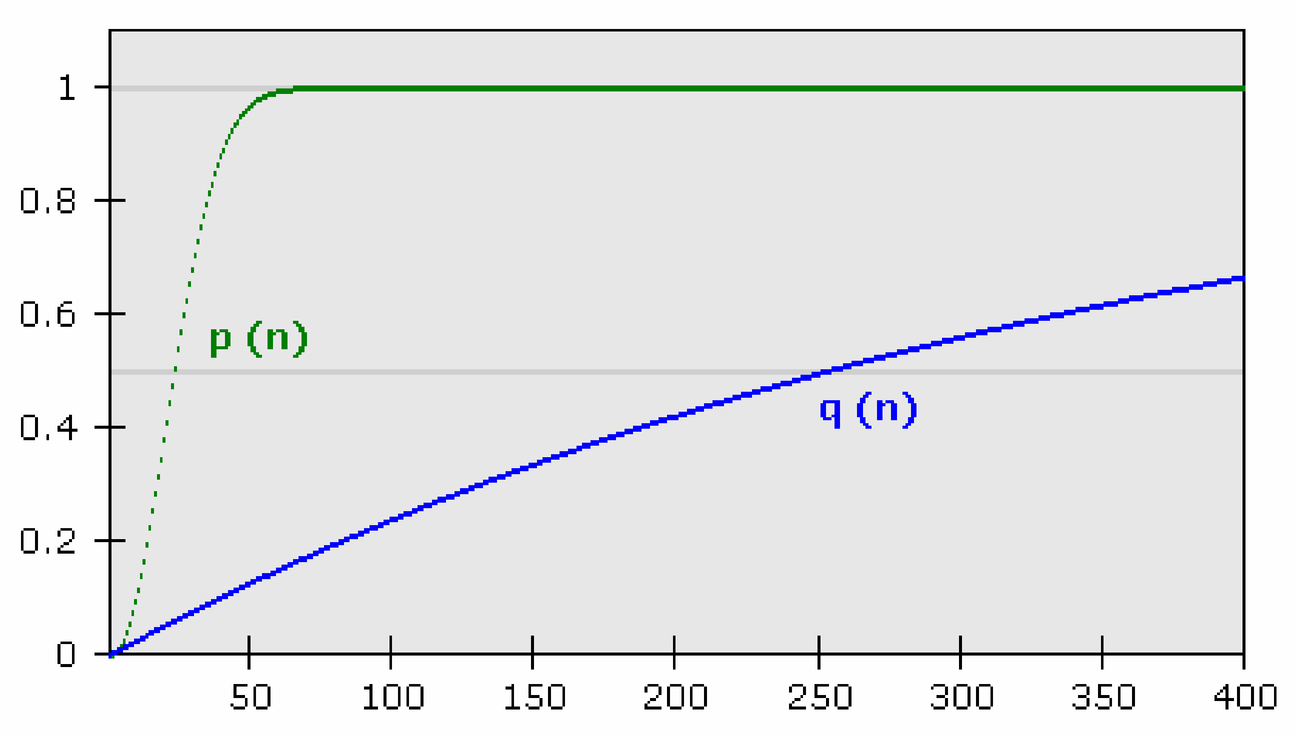
Die erste Person kann den Geburtstag frei wählen, für die zweite gibt es dann 364 Tage, an denen die erste nicht Geburtstag hat. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von

$\frac{u}{m} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$ dass alle n Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben.

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag ist somit:

$$P = 1 - \frac{u}{m} = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Berechnet man etwa für n = 10, 11, ..., bis 23 mit einem Taschenrechner P nach der oben angegebenen Formel kommt man zu dem Ergebnis, dass für eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % nur 23 Personen benötigt werden.



p(n) = Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag q(n) = Wahrscheinlichkeit, dass ein Geburtstag mit deinem zusammenfällt.