Inhaltsübersicht

Kapitel 11: Reihenentwicklungen und Transformationen: aus x mach u und wieder zurück

- Funktionenraum
- Fouriertransformation
- Laplacetransformation
- Partialbruchzerlegung
- Faltung

Funktionenraum

Ein Funktionenraum ist ein Vektorraum, dessen Vektoren Funktionen sind. Viele wichtige Funktionenräume sind unendlichdimensional und werden in der Funktionalanalysis betrachtet.
Funktionenräume werden häufig mit einer Norm versehen, sodass ein normierter Raum oder - im Falle der Vollständigkeit - sogar ein Banachraum entsteht. In anderen Fällen werden Funktionenräume durch Definition einer Topologie zum topologischen Vektorraum.
Ein Banach-Raum, benannt nach dem Mathematiker Stefan Banach, ist ein vollständiger normierter linearer Raum.
Ein Banach-Raum ist also ein Vektorraum V über einem Körper K (normalerweise die reellen oder komplexen Zahlen) mit einer Norm und einer durch diese Norm induzierten Metrik, bezüglich der jede Cauchy-Folge aus Elementen von V gegen ein Element von V konvergiert.
Beispiele: Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

- Die euklidischen und unitären Räume $\mathbb{K}^n$ sind mit der 2-Norm $\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ Banach-Räume.
- Der Raum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ auf einem kompakten Intervall wird mit der Supremumsnorm $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ zu einem Banach-Raum. Dies ist in der Tat eine Norm, da stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall beschränkt sind. Der Raum ist vollständig unter dieser Norm und der resultierende Banach-Raum wird geschrieben als *C[a,b]*.

Was soll das? Ein Punkt (Ortsvektor) in einem Funtionenraum ist eine Funktion. Dadurch kann man z. B. kompliziertere Sachverhalte einfacher ausdrücken, so wird die Ableitung zu einer linearen Abbildung:

Es ist möglich die Ableitung einer Funktion f : V -> W zwischen zwei Banachräumen zu definieren. Intuitiv sieht man, dass, falls x ein Element von V ist, die Ableitung von f im Punkt x eine stetige lineare Abbildung ist, die f nahe x approximiert.

Formal gesprochen nennt man f differenzierbar in x, falls eine stetige lineare Abbildung A : V -> W existiert, so dass $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-A(h)\|}{\|h\|} = 0$

Der Grenzwert wird hier über alle Folgen mit nicht-Null-Element aus V gebildet, die gegen 0 konvergieren. Falls der Grenzwert existiert, schreibt man Df(x) = A und nennt es die Ableitung von f in x.

Dieser Begriff der Ableitung ist eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Ableitung von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da die linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ einfach Multiplikationen mit reellen Zahlen sind.

Differentiation ist eine lineare Operation im folgenden Sinne: sind f und g zwei Abbildungen V -> W, die in x differenzierbar sind, und r und s sind skalare aus $\mathbb{R}$ dann ist rf + sg differenzierbar in x mit D(rf + sg)(x) = rD(f)(x) + sD(g)(x). So kann auch die Kettenregel hergeleitet werden.

Raum der Polynome vom Grad kleiner gleich 4:

Die Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich 4 ($a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4$) ist ein Vektorraum der Dimension 5. Eine Basis ist $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

Raum der trigonometrischen Funktionen :
Die Menge aller trigonometrischen Funktionen ($f(t) = c_n\, e^{in\omega t}$) ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 e^{i\omega t} \\ c_2 e^{i2\omega t} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Konstante Funktionen werden hier durch Vektoren ausgedrückt, die nur in der ersten Komponente einen Beitrag haben.

Die Fourier-Transformation ist eine Integraltransformation, die einer Funktion eine andere Funktion (ihre Fouriertransformierte) zuordnet. In vielen Einsatzgebieten wird sie dazu verwendet, um für zeitliche Signale (z. B. ein Sprachsignal oder einen Spannungsverlauf) das Frequenzspektrum zu berechnen (vgl. Fourieranalyse).

Die Fourier-Transformation und ihre Varianten sind in vielen Wissenschafts– und Technikzweigen von außerordentlicher praktischer Bedeutung. Die Anwendungen reichen von der Physik (Akustik, Optik, Gezeiten, Astrophysik) über viele Teilgebiete der Mathematik (Zahlentheorie, Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie), die Signalverarbeitung und Kryptographie bis zu Ozeanographie und Wirtschaftswissenschaften. Damit ist sie auch in der Materialwissenschaft von zentraler Bedeutung. Je nach Anwendungszweig erfährt die Zerlegung vielerlei Interpretationen. In der Akustik ist sie beispielsweise die Frequenz-Transformation des Schalls in Oberschwingungen.

Wir betrachten stetige, von der Zeit t reell abhängige Funktionen bzw. Vorgänge (z.B. als vektorwertige Funktionen) f(t), die sich nach einer Zeit T wiederholen, also periodisch mit Periode T sind, f(t+T)=f(t). <u>Joseph Fourier postulierte in seiner Arbeit, dass sich f aus periodischen, harmonischen Schwingungen, also Sinus- oder Kosinusfunktionen verschiedener Phase und Amplitude und genau definierter Frequenz zusammensetzen lässt</u>. Betrachten wir eine solche zusammengesetzte Funktion mit (N+1) Summanden:

$$f(t) = A_0 + A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(2\omega t+\varphi_2) + \ldots + A_N\cos(N\omega t+\varphi_N) = \sum_{n=0}^{N} A_n\cos(n\omega t+\varphi_n).$$

Die einzelnen Schwingungen haben die Kreisfrequenz $n\omega$, also die Frequenz $n\omega / 2\pi$. Damit hat die erste Schwingung (Grundschwingung) die Frequenz 1 / T, die nächsten 2 / T, 3 / T, ...

Weil ein Sinus nur ein phasenverschobener Kosinus ist, konnte die Reihendarstellung auf Kosinus-Funktionen beschränkt werden. Wir erhalten sofort auch die Sinusterme, wenn wir die Additionstheoreme benutzen:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos\varphi_n \cdot \cos(n\omega t) - A_n \sin\varphi_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Mit $a_0 := A_0$, $a_n := A_n \cos\varphi_n$ und $b_n := A_n \sin\varphi_n$ erhalten wir eine phasenfreie Darstellung:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega t) - b_n \sin(n\omega t)).$$

Im nächsten Schritt soll die Summe mit Hilfe komplexer Zahlen umgeschrieben werden. Es sind dann komplexe Koeffizienten erlaubt, und die Reihe wird komplexwertig. Sofern reelle Funktionen betrachtet werden, kann diese als Realteil der Summe zurückgewonnen werden. Aus der Euler-Formel oder auch nach der Definition der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion folgt:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a_n(e^{\mathrm{i}n\omega t} + e^{-\mathrm{i}n\omega t}) - \frac{1}{\mathrm{i}} b_n (e^{\mathrm{i}n\omega t} - e^{-\mathrm{i}n\omega t})\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a_n(e^{\mathrm{i}n\omega t} + e^{-\mathrm{i}n\omega t}) + \mathrm{i} b_n (e^{\mathrm{i}n\omega t} - e^{-\mathrm{i}n\omega t})\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left((a_n + \mathrm{i}b_n)e^{\mathrm{i}n\omega t} + (a_n - \mathrm{i}b_n)e^{-\mathrm{i}n\omega t}\right)$$

Mit den komplexen Koeffizienten $c_0 := a_0$, $c_n := \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)$ und $c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)$

für *n>0* erhalten wir eine Summe mit auch negativen Indizes $f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}n\omega t}$

Wir kennen jetzt die trigonometrische Summe in verschiedenen Darstellungen. Eine periodische stetige Funktion soll mittels solch einer Summe approximiert werden. Dazu können die komplexen Koeffizienten c_n, und damit auch die der anderen Darstellungen, sich aus der Summenfunktion zurückgewinnen lassen!

Dazu wird die obige Gleichung mit $e^{-\mathrm{i}m\omega t}$ multipliziert und sodann auf beiden Seiten über dem Intervall $[0,T]$, d.h. über eine Periode, integriert. Mit Umformungen erreicht man folgende Aussage:

$$e^{-\mathrm{i}m\omega t} f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(e^{\mathrm{i}n\omega t} e^{-\mathrm{i}m\omega t}\right) = \sum_{n=-N-m}^{N-m} c_{n+m} e^{\mathrm{i}(n+m)\omega t - \mathrm{i}m\omega t} = \sum_{n=-N-m}^{N-m} c_{n+m} e^{\mathrm{i}n\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T e^{-\mathrm{i}m\omega t} f(t)dt = \sum_{n=-N-m}^{N-m} c_{n+m} \int_0^T e^{\mathrm{i}n\omega t} dt,$$

und für das n-te Integral auf der rechten Seite gilt:

für $n = 0$: $\int_0^T e^{\mathrm{i}0\omega t} dt = T$ für $n \neq 0$ $\int_0^T e^{\mathrm{i}n\omega t} dt = \left[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega} e^{\mathrm{i}n\omega t}\right]_0^T$

Wegen $\omega T = 2\pi$ gilt nun aber $e^{\mathrm{i}n\omega T} = (e^{2\pi\mathrm{i}})^n = 1$ daher $\int_0^T e^{\mathrm{i}n\omega t} dt = 0$

So vereinfacht sich das Integral zu:

$$\int_0^T f(t) e^{-\mathrm{i}m\omega t} dt = \sum_{n=-N-m}^{N-m} c_{n+m} \int_0^T e^{\mathrm{i}n\omega t} dt = T c_m \quad \Leftrightarrow c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\mathrm{i}m\omega t} dt.$$

Wir können nun versuchen, die trigonometrische Summe durch eine beliebige stetige periodische Funktion *f* zu ersetzen, die Koeffizienten nach obigen Formeln zu bestimmen und die mit diesen Koeffizienten gebildeten trigonometrischen Summen mit der Ausgangsfunktion vergleichen:

$$f_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \int_0^T f(s) e^{-in\omega s}\, ds\, e^{in\omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-N}^{N} f(s) e^{in\omega(t-s)}\, ds$$

$$= \int_0^T \frac{1}{T} S_N(\omega(t-s)) f(s)\, ds$$ Dabei ist $$S_N(\tau) = \sum_{n=-N}^{N} (e^{i\tau})^n = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\tau)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)}$$

der so genannte Dirichtlet-Kern

Diese Reihe konvergiert für sehr viele Funktionen, unter anderem konvergiert sie für alle differenzierbaren Funktionen oder alle quadratintegrierbaren Funktionen. Wir können also zusammenfassen:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\omega t}}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt.}$$

Aperiodische Vorgänge:Voraussetzung für die hergeleitete Fourier-Reihe ist die Periodizität von f(t) über dem Zeitintervall T. Selbstverständlich gibt es auch Funktionen, die bis ins Unendliche nicht periodisch sind, d.h., für die T gegen Unendlich geht. Bei Tönen haben die Oberschwingungen die Frequenz n / T für die n-te Oberschwingung (siehe Weblink: http://www.sengpielaudio.com/Harmonische-Partialtoene-Obertoene.pdf). Die Differenz der n-ten Oberfrequenz von der vorherigen ist n / T – (n – 1) / T = 1 / T, d.h. die Oberfrequenzen haben den Abstand 1/T. Für T gegen Unendlich rücken sie infinitesimal eng zusammen - und eine Summe über solche kleinen Stücke ist genau die Definition des Riemann-Integrals. Die Summe wird im Grenzfall zum Integral.

Das Fourier-Integral, die kontinuierliche Fourier-Transformation, ist also gegeben durch den üblichen Grenzübergang von der Summe zum Integral:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad \text{mit:} \quad a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Aus der Folge a_n ist nun das kontinuierliche Spektrum $a(\omega)$ geworden. Man bezeichnet genau genommen die zweite Transformation als Fourier-Transformation, die erste, deren inverse, ist die Fourier-Synthese.

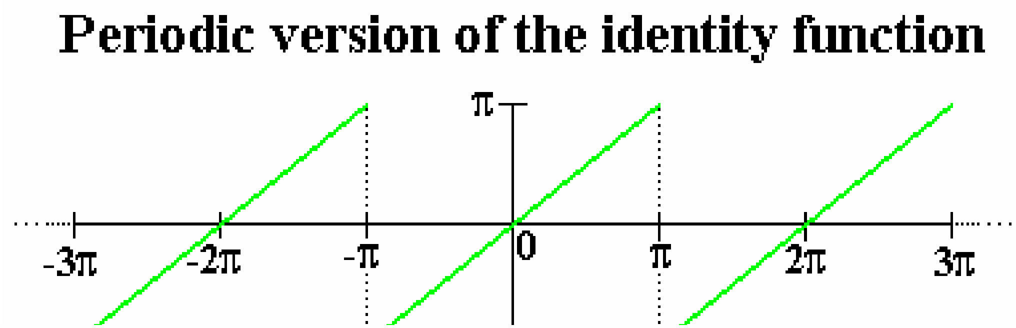
Fourier-Transformation

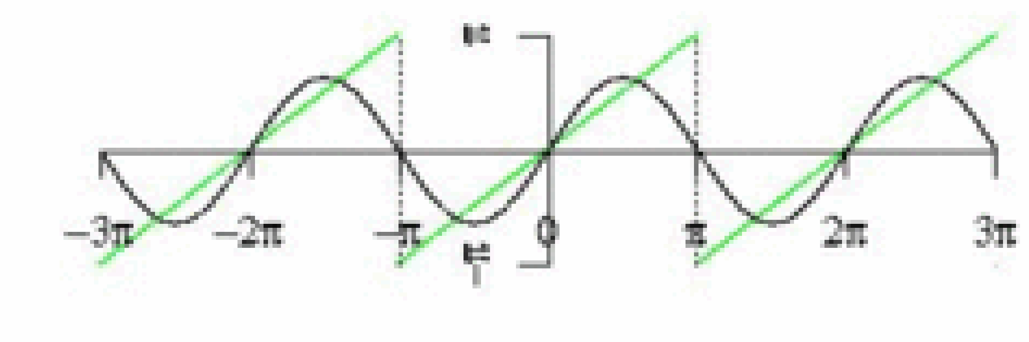
Die Fouriertransformation wird oft eingesetzt, um Differentialgleichungen zu lösen. Denn die e^{inx} bzw. die sin(nx),cos(nx) sind Eigenfunktionen der Differentiation, und die Transformation wandelt lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in normale algebraische Gleichungen um. (So ist zum Beispiel in einem linearen zeitinvarianten physikalischen System die Frequenz eine Erhaltungsgröße, und das Verhalten kann für jede Frequenz einzeln gelöst werden.)

Die verschiedenen Varianten der Fourier-Transformation so wie man sie häufig unter dem selben Begriff findet, sind in folgender Tabelle zusammengefasst. Dabei sind die Formeln als formal zu verstehen, d.h. sie sind ohne Rücksicht auf Existenz– und Konvergenzbedingungen angegeben.

Funktionstyp	Art der Transformation	Formel	Entwicklung in Frequenzkomponenten
$(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$	Diskrete Fourier-Transformation	$\hat{x}_k = \sum_{n=1}^{N} x_n \exp\left(-i2\pi \frac{kn}{N}\right)$	$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k \exp\left(i2\pi \frac{kn}{N}\right)$
$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$	Fourier-Reihe	$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n}$	$x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega$
$x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$	Fourier-Reihe	$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} dt$	$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_k e^{ikt}$
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$	kontinuierliche Fourier-Transformation	$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$	$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Unten stehend ein graphisches Beispiel der Addition der ersten fünf Fourier-Koeffizienten der Sägezahnfunktion:





-> annimated gif

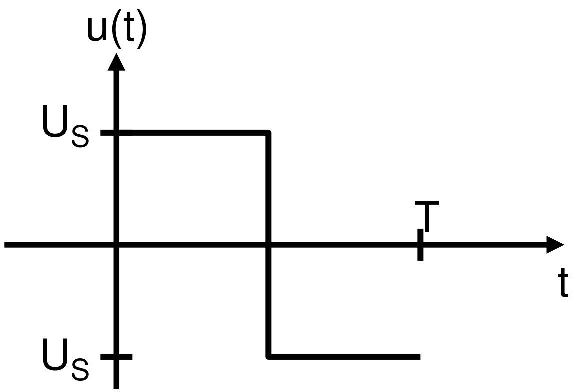
Anwendungen der Fouriertransformation und Analyse sind vielfältig:

-Bildkompression (Jpeg)
-Signalanalyse
-Radiotechnik
-Eigenfrequenzen
-...

Fourieranalyse:
Die Fourieranalyse beschreibt das Zerlegen eines beliebigen Signals in Sinus- und Kosinusfunktionen (eine Fourierreihe). Die Fouriersynthese im Gegensatz dazu beschreibt die Erzeugung beliebiger Signale aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

Als Beispiel soll die Zerlegung einer Rechteckschwingung (Tastverhältnis 1:1, kein Gleichspannungsanteil) dienen. Die Funktion lautet:

$$u(t) = \left\{ \text{für alle n} \in \mathrm{N}_0 \begin{array}{r} u(t) = U_s \text{ für n}T \leq t < (n + \frac{1}{2}T) \\ u(t) = -U_s \text{ für } (n + \frac{1}{2}T) \leq t < (n+1)T \end{array} \right\}$$



Für die Koeffizienten gilt: $c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t} dt.$

Fourier-Transformation

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-im\omega t}dt = \frac{1}{T}(\int_0^{T/2} f(t)e^{-im\omega t}dt + \int_{T/2}^{T} f(t)e^{-im\omega t}dt) = \frac{1}{T}(\int_0^{T/2} U_s e^{-im\omega t}dt - \int_{T/2}^{T} U_s e^{-im\omega t}dt) =$$

$$\frac{U_s}{T}(\int_0^{T/2}\cos(-m\omega t) + i\sin(-m\omega t)dt - \int_{T/2}^{T}\cos(-m\omega t) + i\sin(-m\omega t)dt) =$$

$$\frac{U_s}{Tm\omega}\left(\Big|_0^{T/2} \sin(m\omega t) + i\cos(m\omega t) - \Big|_{T/2}^{T} \sin(m\omega t) + i\cos(m\omega t) \right)$$ => kein Kosinusbeitrag

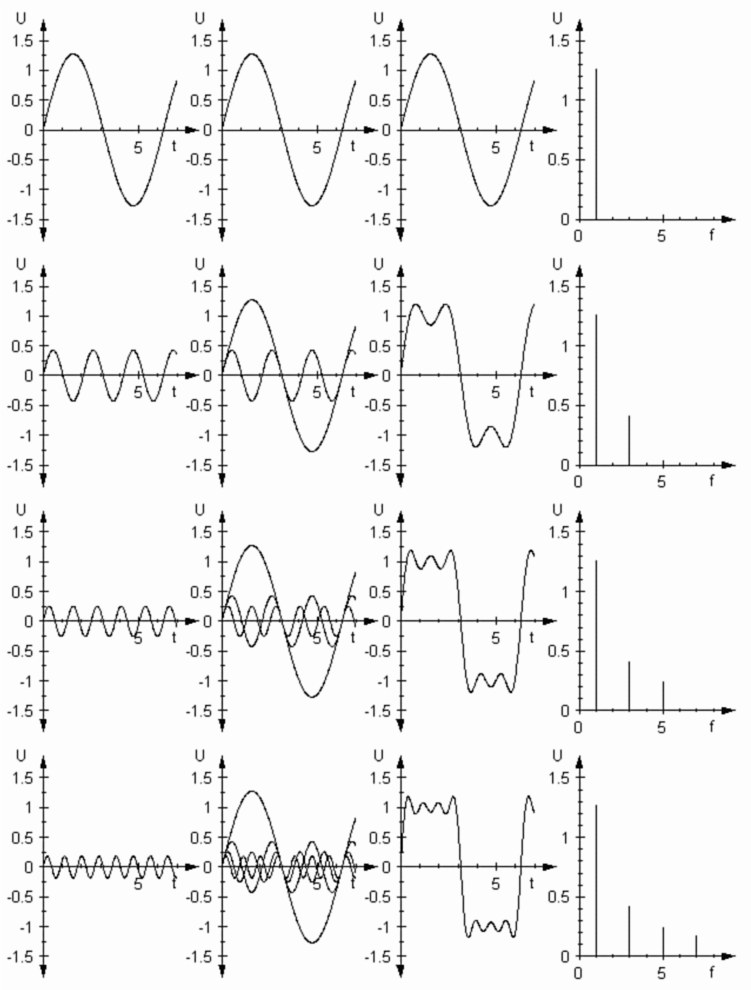
=> Sinusbeitrag: keiner für m gerade, m ungerade: const.*T

also:

$$u(t) = \frac{4U_S}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \frac{1}{9}...\right) \qquad u(t) = \frac{4U_s}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)\omega t)$$

Anhand dieser Funktion erkennt man, dass ein Rechteck unendlich viele Oberschwingungen enthält. Es enthält jeweils die ungeraden harmonischen Oberschwingungen mit dabei abnehmender Amplitude. Aufgrund dessen wird ein Rechtecksignal auch häufig zum Testen elektronischer Schaltungen genommen, da so das Frequenzverhalten dieser Schaltung erkannt wird.

In diesem Bild ist die Fouriersynthese eines Rechtecksignals dargestellt. Die Diagramme der ersten Spalte zeigen diejenige Schwingung, welche in der jeweiligen Zeile hinzugefügt wird. Die Diagramme in der zweiten Spalte zeigen alle bisher berücksichtigten Schwingungen, welche dann in den Diagrammen der dritten Spalte addierten werden, um dem zu erzeugenden Signal möglichst nahe zu kommen. Die Schwingung aus der ersten Zeile nennt sich Fundamentalschwingung, alle weiteren, die hinzugefügt werden, sind so genannte Oberschwingungen. Je mehr solcher Vielfache der Grundfrequenz berücksichtigt werden, umso näher kommt man einem idealen Rechtecksignal. An den unstetigen Stellen der Rechteckfunktion bildet sich durch die Fouriersynthese bedingt ein so genannter Überschwinger, der auch bei größerer Approximation nicht verschwindet. Die vierte Spalte zeigt das Frequenzspektrum.



http://de.wikipedia.org/wiki/Diskrete_Fourier-Transformation

Laplace-Transformation

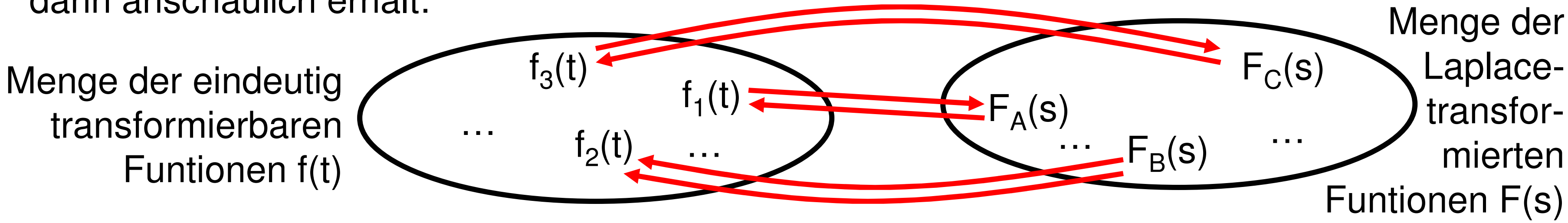
Die Laplace-Transformation eignet sich aufgrund ihres Differentiationssatzes unter anderem dazu, linare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Dazu transformiert man die Differentialgleichung in den Spektralbereich, löst die so erhaltene algebraische Gleichung und transformiert die Lösung in den Zeitbereich zurück. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass das gewonnene Ergebnis ausschließlich Aussagen für den Zeitraum ab t = 0 liefert, da die Laplace-Transformierte durch die Integration ab t = 0 bestimmt wird.

Die Laplace Transformation transformiert eine Funktion f(t) in eine andere Funktion F(s) abhängig von einer anderen Variablen, man schreibt: $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$

Hin- und Rücktransformaton sind möglich, für die Rücktransformation schreibt man:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

Hin- und Rücktransformaton sind unter bestimmten Vorraussetzungen eindeutig, so das man dann anschaulich erhält:



Laplace-Transformation

Generell bildet die Laplace-Transformation reellwertige Originalfunktionen auf komplexwertige Bildfunktionen ab. Die wichtigste Eigenschaft der Laplace-Transformation besteht nun darin, dass der Differentiation und Integration im reellen Originalbereich einfache algebraische Operationen im Bildbereich entsprechen. Bei vielen Anfangs- und Randwertproblemen spielt der "Zeitbereich" (Abhängigkeit von der Variablen t) die Rolle des reellen Originalbereiches und der Frequenzbereich oder Spektralbereich (Abhängig von der Variablen s) diejenige des komplexen Bildbereiches.

Der Einsatz der Laplace-Transformation bietet die folgenden Vorteile: Die Algebraisierung bewirkt, dass:

- gewöhnliche Differentialgleichungen im Originalbereich auf algebraische Gleichungen im Bildbereich,
- partielle Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variablen im Originalbereich auf partielle (bzw. gewöhnliche) Differentialgleichungen mit n-l unabhängigen Variablen im Bildbereich,
- und Integralgleichungen vom Faltungstyp (kommt später) im Originalbereich auf algebraische Gleichungen im Bildbereich abgebildet werden.
- Die Lösungen der transformierten Probleme lassen sich im Bildbereich wesentlich einfacher erarbeiten als im Originalbereich.

Laplace-Transformation

Die Laplacetransformation ist konkret eine sog. Integraltransformation, ähnlich der Fouriertransformation. Die formale Definition für die Laplace-Transformation lautet:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \qquad (\text{mit:} \quad s = \sigma + \mathrm{i}\omega; \quad \sigma > 0; \quad t \geq 0)$$

Die Funktion $F(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$ genannt. *Kausal* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass $f(t)$ für Zeiten $t < 0$ verschwindet.

Die Rücktransformation aus dem Spektralbereich wird bewirkt durch:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\imath\infty} e^{st} F(s)\, ds \qquad (\text{mit:} \quad c \in \mathbb{R}, c > \max_i \Re(Res_i))$$

Da hier über eine komplexe Variable integriert wird, muss die Rücktransformation mit den Methoden der Funktionentheorie gelöst werden. In der Praxis verwendet man daher häufig Korrespondenztabellen, mit denen diese Aufgabe leichter gelöst werden kann. Hierbei wird ausgenutzt, dass viele Anwendungen der Laplace-Transformation auf gebrochen-rationale Spektralfunktionen führen, die sich (beispielsweise durch Partialbruchzerlegung) in Terme niedriger Ordnung umformen lassen, die sich in den Tabellen wiederfinden.

Existenz- und Eindeutigkeit:
Existenz: Gibt es reelle Konstanten M_1, M_2, s_0, und T, so dass die reelle Zeitfunktion $f(t)$ den Ungleichungen:

$$\int_0^T |f(t)|dt \leq M_1 \quad \text{und} \quad |f(t)| \leq M_2 e^{s_0 t} \quad \text{für} \quad t \geq T$$

genügt, so existiert das Laplace-Integral in der Konvergenzhalbebene: $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$

Also muss das Integral über die Funkion beschränkt sein und die Funktion darf höchstens so stark wachsen wie eine Exponentialfunktion.

Beispiele von Funktionen, deren Laplace-Integral nicht existiert:

Die Funktion $\frac{1}{t}$ erfüllt die erste Bedingung nicht und besitzt daher keine Laplace-Transformierte.

Die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ erfüllt die zweite Bedingung nicht, ist somit nicht von "exponentieller Ordnung" und besitzt daher ebenfalls keine Laplace-Transformierte.

Eindeutigkeit:

Wenn für zwei Zeitfunktionen f(t) und g(t) die Voraussetzungen gelten:

- *f*(*t*) und *g*(*t*) sind stückweise stetig
- *f*(*t*) und *g*(*t*) sind von exponentieller Ordnung für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$
- die Laplace-Transformierten $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existieren und besitzen überlappende Konvergenzbereiche in der s-Ebene
- *F*(*s*) = *G*(*s*) im Konvergenzbereich

dann ist *f*(*s*) = *g*(*s*) überall dort, wo *f*(*t*) und *g*(*t*) stetig sind.

Beispiele: *f*(*t*)=ct

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} ctdt = c\int_0^\infty te^{-st}dt = -\Big|_0^\infty \frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = -\Big|_0^\infty \frac{1}{s^2}e^{-st} = \frac{1}{s^2}$$

u = t   v'=e^{-st}

u'=1   v=-1/s e^{-st}

f(*t*)=e^{-t}

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t(s+1)}dt = -\frac{1}{s+1}\Big|_0^\infty e^{-t(s+1)} = \frac{1}{s+1}e^{-1}$$

Achtung, bei den Funktionen $F(s)=\frac{1}{s+1}e^{-1}$ und $F(s)=\frac{1}{s^2}$ handelt es sich um Abbildungen

von der komplexen Ebene (denn s=σ+iω) in die komplexe Ebene!

Weitere Eigenschaften der Laplace Transformation:

Linearitätssatz

Sind $f_1(t)$ und $f_2(t)$ kausale Zeitfunktionen mit den Laplace-Transformierten $\mathcal{L}\{f_1(t)\}$ und $\mathcal{L}\{f_2(t)\}$, so ergibt die Laplace-Transformation deren Linearkombination infolge Linearität der Integration

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t))\,dt = a_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt + a_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt$$

und somit ist die Laplace-Transformation linear

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Allgemein gilt für kausale Zeitfunktionen $f_k(t)$ die lineare Beziehung

$$\mathcal{L}\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathcal{L}\{f_k(t)\}.$$

Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\} = \mathrm{e}^{as}\left(F(s) - \int_0^a f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right) \qquad (t \geq a > 0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathrm{e}^{-as}F(s) \qquad (t \geq a > 0)$$

Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$$

Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}f(t)\} = F(s+a) \qquad (a \in \mathbb{C})$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}f(t)\} = F(s-a) \qquad (a \in \mathbb{C})$$

Multiplikationssatz

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Divisionssatz

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} = \int_s^\infty F(q)\mathrm{d}q$$

Periodische Funktionen:

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T p(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau$$

Differentiationssatz

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(+0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0) \\ &= s^n F(s) - \textstyle\sum_{v=1}^{n} s^{n-v} f^{(v-1)}(+0) \end{aligned}$$

Integrationssatz

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(q)\mathrm{d}q\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Der Differentiationssatz und der Integrationssatz ermöglichen die oben erwähnte Vereinfachung von Differentialgleichungen. (Beispiel)
Folgende Tabellen erleichtern die Arbeit mit der Laplacetransformation:

Id	Allgemeine Eigenschaft bzw. Operation	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	Linearität	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
2	Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$
3	Dämpfung im Originalbereich	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a) \qquad (a \in \mathbb{C})$
4	Sinus-Multiplikation	$sin(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2i} \cdot (F(s-ia) - F(s+ia))$
5	Cosinus-Multiplikation	$cos(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-ia) + F(s+ia))$
6		$sinh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) - F(s+a))$
7		$cosh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) + F(s+a))$
8	Verschiebung im Originalbereich	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
9	Periodische Funktion	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} dt$
10	Endliche Laplace-Transformation	$f(t) = 0 \qquad t > T$	$F(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$ ganze Funktion
11	Rationale Funktion a_k Nullstellen von $Z(s)$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{N(a_k)}{Z'(a_k)} e^{a_k t} dt$	$\frac{N(s)}{Z(s)}$

Laplace-Transformation

Id	Operation	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
12	1. Ableitung im Originalbereich	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
13	2. Ableitung im Originalbereich	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
14	n^{te} Ableitung im Originalbereich	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)s^{n-k-1}$
15	1. Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$	$F'(s)$
16	2. Ableitung im Bildbereich	$t^2f(t)$	$F''(s)$
17	n^{te} Ableitung im Bildbereich	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
18	Integration im Originalbereich	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{s}F(s)$
19	Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty f(u)\,du$
20	Faltung im Originalbereich Multiplikation im Bildbereich	$\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$	$F(s)\,G(s)$
21	Multiplikation im Originalbereich Faltung im Bildbereich	$f(t)\,g(t)$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(\sigma)\,G(s-\sigma)\mathrm{d}\sigma$

Laplace-Transformation

Id	Funktionsname	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Konvergenz-bereich
22	Dirac'sche Deltafunktion Einheitspuls	$\delta(t)$ $\delta^n(t)$	1 s^n	$s \in \mathbb{C}$
23	Heaviside'sche Sprungfunktion Einheitspuls	1	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
24	Exponentialfunktion	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
25	n-te Potenz	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
26	Potenzreihe	$\sum_0^\infty a_n (t-t_0)^n$	$\sum_0^\infty \frac{a_n n!}{s^{n+1}} e^{t_0 s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
27	Gedämpfte Potenzialfunktion	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
28		$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\pm at}$	$(s \mp a)^{-n}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
29	n-te Wurzel	$\sqrt[n]{t}$	$s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
30	Sinus	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
31	Cosinus	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
32	Sinus hyperbolicus	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \|a\|$
33	Cosinus hyperbolicus	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \|a\|$
34	Logarithmus naturalis	$\ln(at)$	$-\frac{1}{as}(\ln(\frac{s}{a}) + \gamma)$	$\mathrm{Re}(s) > 0$

Id	Funktionsname	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Konvergenz-bereich
35	Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
36	Modifizierte Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0	$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
37	Bessel-Funktion erster Art der Ordnung *n*	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$ $(n > -1)$
38	Modifizierte Bessel-Funktion erster Art der Ordnung *n*	$I_n(at)$	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{a^n\sqrt{s^2-a^2}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$ $(n > -1)$
39	Laguerre-Polynome der Ordnung *n*	$L_n(at)$	$\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$

Beispiel der Anwendung der Laplacetransformation bei Differentialgleichungen mit AWP:

$$\ddot{f}(t) - 3\dot{f}(t) + 2f(t) = 1;\; \mathrm{f}(0) = 0, \dot{\mathrm{f}}(0) = 1$$

$$Laplacetransformation:\quad s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) - 3(sF(s) - f(0)) + 2F(s) = \frac{1}{s};$$

$$s^2F(s) - 1 - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s};$$

$$F(s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s} - 1; \qquad F(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)}\left(\frac{1}{s} - 1\right);$$

Partialbruchzerlegung: $F(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s-2} - 2\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - 2e^{t} + \frac{1}{2}$$

Partialbruchzerlegung

In der Mathematik ist die Partialbruchzerlegung eine bestimmte Darstellung rationaler Funktionen r(z) als Summe von Brüchen der Form $\frac{a}{(z-b)^n}$ mit Konstanten a und b.

Eine rationale Funktion r mit n verschiedenen Polstellen z_j der Ordnung m_j lässt sich in der Form

$r(z) = p(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{j,k}}{(z-z_j)^k}$ schreiben, wobei der Grad des Polynoms p der Differenz von Zähler- und Nennergrad von r entspricht. Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung (Abk. PBZ).

Die Partialbruchzerlegung wird z.B. verwendet, um rationale Funktionen integrieren zu können. Sie wird ebenfalls bei der Lösung von Differentialgleichungen bzw. Differenzengleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation bzw. z-Transformation benötigt.

Diese Zerlegung kann folgendermaßen bestimmt werden:

- Falls der Grad des Zählers größer gleich dem Nennergrad ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden (man erhält p). Ansonsten ist p=0.
- Abhängig von der Form des Nennerpolynoms wird ein geeigneter Ansatz für das Ergebnis aufgestellt (siehe unten).
- Die Konstanten $a_{j,k}$ ergeben sich beispielsweise durch Koeffizientenvergleich nach Multiplikation der Zerlegung mit dem Nennerpolynom (Zwei Polynome gleichen Grades sind dann gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind).

Partialbruchzerlegung

Abhängig von der Form des Nennerpolynoms müssen verschiedene Ansätze verfolgt werden. Hierfür müssen sämtliche Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sein. Diese sind am einfachsten sichtbar, wenn das Nennerpolynom auf folgende Form gebracht wird:

$$(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^{k_n}$$

Hierbei stellen dann k_1 etc. den Grad der jeweiligen Nullstellen und x_1 etc. die Nullstellen selber dar.

- Nennerpolynom mit einfachen reellen Nullstellen x_1, x_2, ..., x_n:

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

- Nennerpolynom mit i-facher Nullstelle x_k:

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{b_1}{x - x_k} + \ldots + \frac{b_i}{(x - x_k)^i}$$

Um die Konstanten a_k, b_k, ... zu ermitteln, wird der Ansatz mit der Funktion gleichgesetzt und so erweitert, dass bei f(x) der Nenner entfällt. Dann werden die (noch unbekannten) Konstanten so sortiert, dass eine bis mehrere Bedingungen entstehen, woraus man sie berechnen kann.

Partialbruchzerlegung

Beispiele:

2 Nullstellen: $$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)}$$

Dieser Ausdruck kann (um die Nullstellen des Nennerpolynoms besser sehen zu können) auch geschrieben werden als:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

Man erkennt zwei einfache Nullstellen. Hierfür wird der erste oben erwähnte Ansatz verwendet:

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{x}{(x^2-1)}$$

wobei A und B (unbekannte, noch zu ermittelnde) Konstanten sind. Erweitert man beide Seiten der Gleichung auf $(x^2 - 1)$ (das Nennerpolynom auf der rechten Seite), erhält man

$Ax - A + Bx + B = x.$

Sortiert man diese so um, dass x auch auf der linken Seite alleine steht, erhält man

$(A + B)x + B - A = x.$

Man kann diese Gleichung auf verschiedene Weisen, z.B. folgendermaßen lösen: Man setzt x = 0: => $B - A=0$ *also* $A=B$. Einsetzen liefert: $2Ax = x$. *also* $A=B=1/2$

Partialbruchzerlegung

Setzt man diese Werte für A und B ein, erhält man also die Zerlegung:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Doppelte Nullstelle:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)+(2x-1)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2\,x-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2\,x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad \Big|\cdot(x-1)^2$$

$$2\,x-1 = A(x-1)+B$$

$$2\,x-1 = Ax - A + B$$

Es folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$A = 2 \wedge -A + B = -1 \qquad A = 2 \wedge B = 1$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Faltung

In der Mathematik und besonders in der Funktionalanalysis beschreibt die Faltung einen mathematischen Operator, welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion liefert, die die "Überlappung" zwischen f und einer gespiegelten verschobenen Version von g angibt.
Definition:

Für zwei auf dem reellen Intervall D definierte Funktionen: $f, g : D \to \mathbb{C}$

wird die Faltung von f mit g als f * g notiert und ist definiert als das Integral über das Produkt von f mit einer gespiegelten verschobenen Version von g:

$$(f * g)(t) = \int_D f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau$$

Der Integrationsbereich ist der Definitionsbereich D beider Funktionen. Im Fall eines beschränkten Definitionsbereichs werden f und g oft als periodisch fortgesetzt angenommen, damit der Faktor g(t - τ) stets definiert ist. Oft werden auch f und g stattdessen durch Null fortgesetzt.

Eine anschauliche Deutung der Faltung ist die Gewichtung einer Funktion mit einer anderen. Der Funktionswert der Gewichtsfunktion an einer Stelle t gibt an, wie stark der um t zurückliegende Wert der gewichteten Funktion in den Wert der Ergebnisfunktion eingeht.

Faltung

Eigenschaften:

- Kommutativität
  f * g = g * f
- Assoziativität
  f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h
- Distributivität
  f * (g + h) = (f * g) + (f * h)
- Assoziativität mit der skalaren Multiplikation
  a(f * g) = (af) * g = f * (ag), wobei a eine beliebige komplexe Zahl ist.
- Faltungstheorem

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$$

Wobei $\mathcal{F}f$ die Fouriertransformierte von f beschreibt. Ein ähnliches Theorem gilt auch für die Laplacetransformation:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\,\mathrm{d}u\right\}$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F_1(\sigma) F_2(s-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

- Ableitungsregel:
  $D(f * g) = Df * g = f * Dg$; Dabei ist Df die Ableitung f ' von f
- Faltung mit speziellen Funktionen

  f(x) * δ(x) = f(x), wobei δ die Delta-Distribution ist. δ(x) ist also das neutrale Element der Faltung.

  $f(x) * \Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, wobei Θ die Sprungfunktion ist.

In der Akustik (Musik) wird die Faltung (unter Zuhilfenahme der FFT = schnelle Fouriertransformation) auch zur digitalen Erzeugung von Hall und Echos und zur Anpassung von Klangeigenschaften verwendet. Dazu wird die Impulsantwort des Raumes, dessen Klangcharakteristik man übernehmen möchte, mit dem Signal, das man beeinflussen möchte, gefaltet.
In der Ingenieurmathematik und der Signalverarbeitung werden Eingangssignale (äußere Einflüsse) mit der Übertragungsfunktion (Einheitsantwort, Pulsantwort, Reaktion des betrachteten Systems auf die Einheitssprungfunktion am Eingang) gefaltet, um die Antwort eines lineares zeitinvariantes dynamisches System auf beliebige Eingangssignale zu berechnen. Dazu werden eigentlich immer die Fourier- oder Laplacetransformierten dieser beiden Funktionen verwendet.