Inhaltsübersicht

elektronische Literatur:

- http://www.wikipedia.de
- http://www.mathe-online.at
- http://rosewood.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/MIB.html
- http://www.mathematik.de

- Bücher, deren Inhaltsverzeichniss diesem gleicht

Diese Vorlesung ist u. a. mit der Hilfe von Texten und Abbildungen aus Wikipedia erstellt die unter die GNU Free Documentation License **fallen. Selbstverständlich können alle Inhalte dieser Vorlesung unter diesen Lizenzbestimmungen weiter verwendet werden. Originalquellen und Autoren können durch Suche unter** http://de.wikipedia.org/ **gefunden werden.**

Es wird darauf hingewiesen, daß dieses Manuskript fehlerhaft ist und daß die Benutzung auf eigene Gefahr erfolgt. Dies gilt insbesondere für die Prüfungsvorbereitung.

Es ist geplant, dieses Manuskript so weit zu entwickeln, dass es selber bei Wikipedia oder einem Schwesterprojekt veröffentlicht werden kann.

Kapitel 1:
In Medias Res: Rechnen mit Konstrukten der Mathematik:

-Was ist Mathematik?

-Analysis
(Definition der Funktion, Steigung, Differential und Integralrechnung,...)

-Differentialgleichungen

-Komplexe Zahlen

-Mehrdimensionale Analysis

-Vektorfelder (Gradientenfelder)

-Funktionsräume

http://www.mathematik.de/mde/information/wasistmathematik/wasistmathematik.html

http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik

... Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft, die selbst geschaffene abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht, beschrieben....

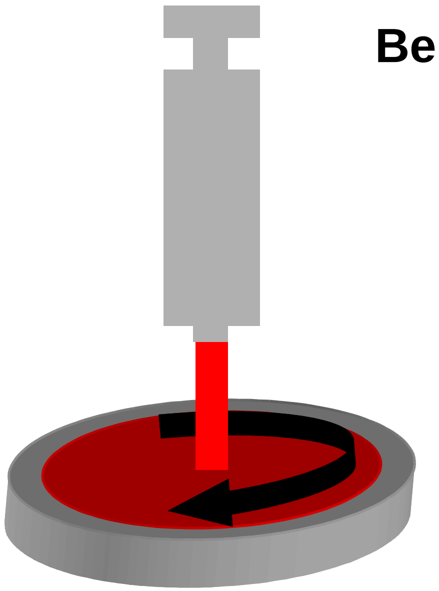
...Während beispielsweise alle naturwissenschaftlichen Erkenntnisse durch neue Experimente falsifiziert werden können und daher prinzipiell vorläufig sind, werden mathematische Aussagen durch reine Gedankenoperationen auseinander hervorgebracht oder aufeinander zurückgeführt und brauchen nicht empirisch überprüfbar zu sein. Dafür muss aber für mathematische Erkenntnisse ein streng logischer Beweis gefunden werden, bevor sie als mathematischer Satz anerkannt werden. ...

Beispiel: Zahlen, natürliche Zahlen

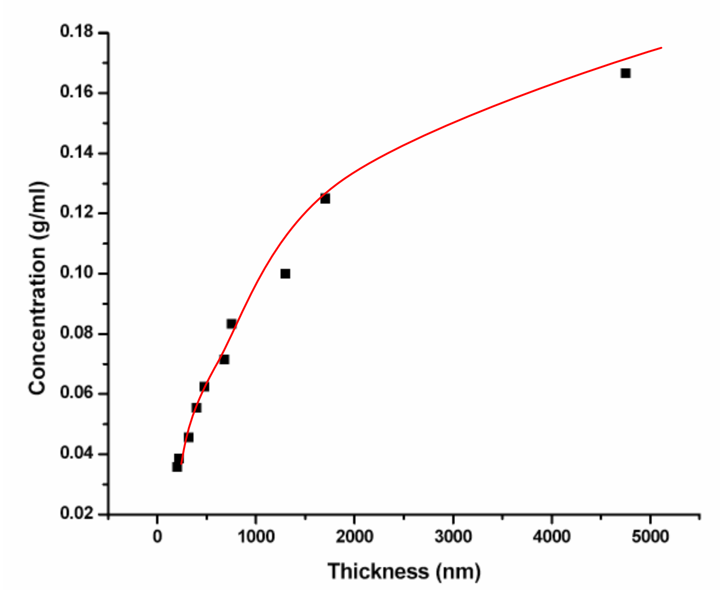
Funktionen: f(x)=... z.B. $f(x)=x^2$; $f(x)=3$; $f(x)=-x$; $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2}$

Oder z.B. $y=y(x)=f(x)=x^2$

Allgemeiner (vorläufig): Einem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet
Allgemeiner (vorläufig): Einem Wert wird ein anderer zugeordnet...



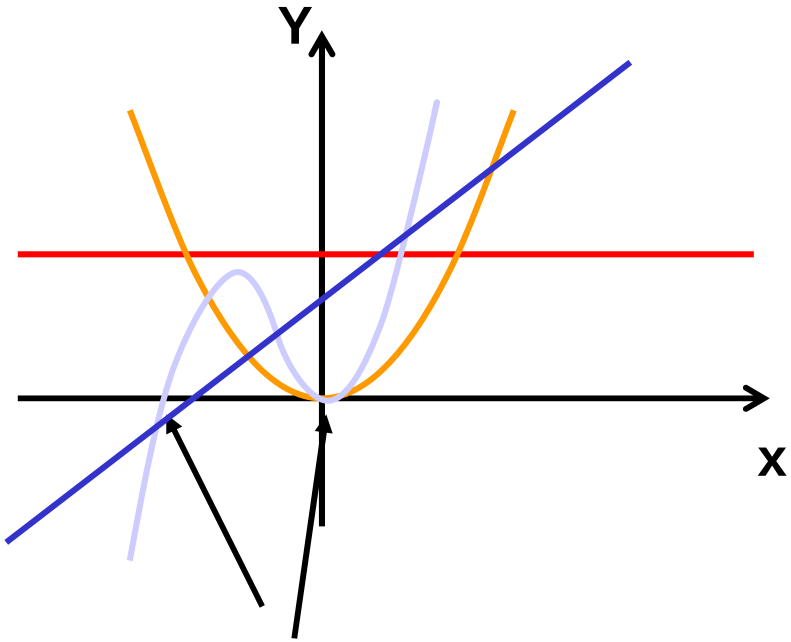
Beispiel :



Beispiel:

injektiv,
bijektiv,
surjektiv

Verschiedene Funktionen am Beispiel aus der Natur
Polynome, Maxima, Minima



$$Y = x_0$$

$$Y = x_1 x + x_0$$

$$Y = x_2 x^2 + x_1 x + x_0$$

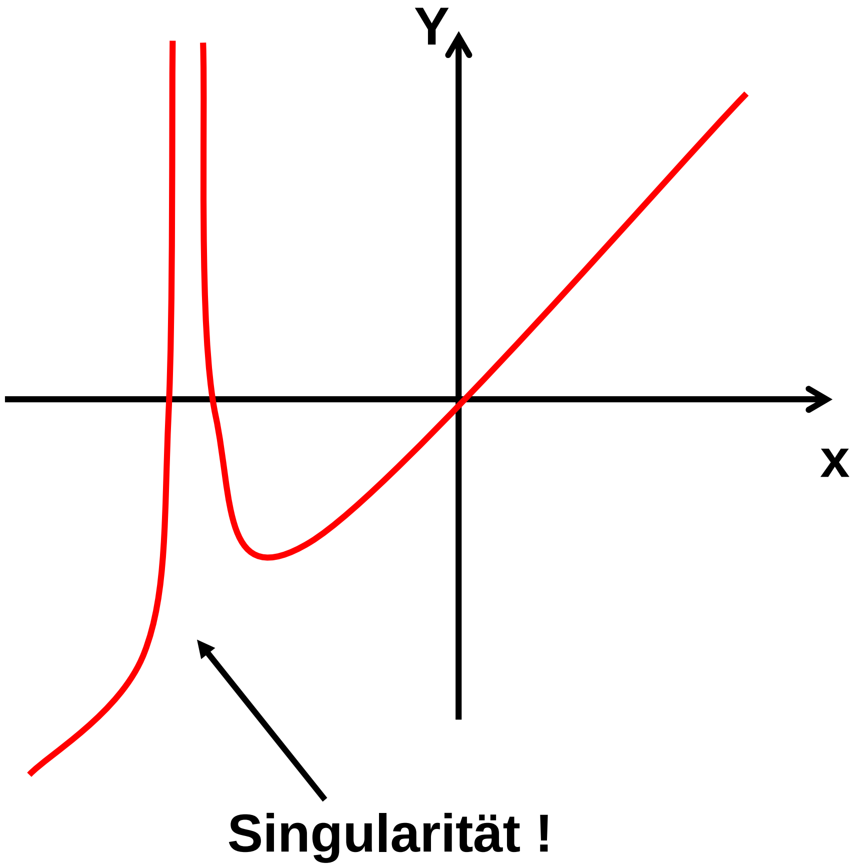
$$Y = x_3 x^3 + x_2 x^2 + x_1 x + x_0$$

$$Y = x_4 x^4 + x_3 x^3 + x_2 x^2 + x_1 x + x_0$$

$$Y = \dots x_4 x^4 + x_3 x^3 + x_2 x^2 + x_1 x + x_0$$

$$Y = \sum_{i=0}^{N} x_i x^i$$ **Beispiele; Zusatz**

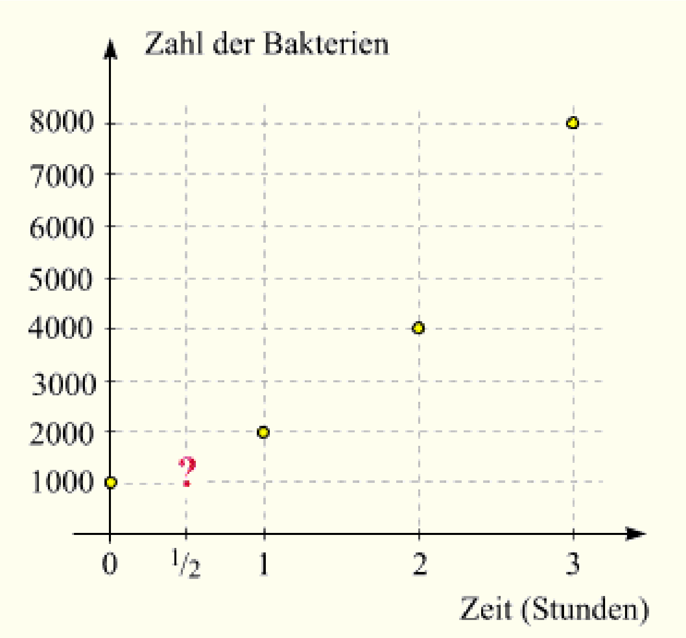
$$Y = \frac{\sum_i a_i x^i}{\sum_i b_i x^i}$$

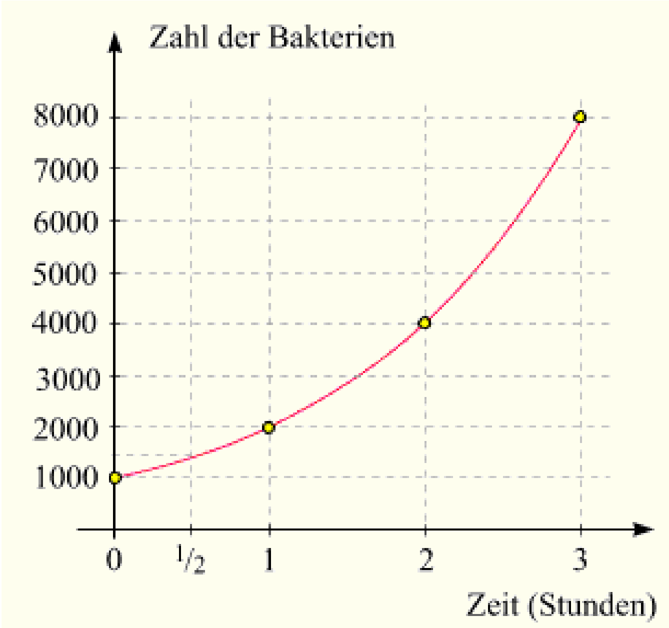


Siehe z. B. www.mathe-online.at

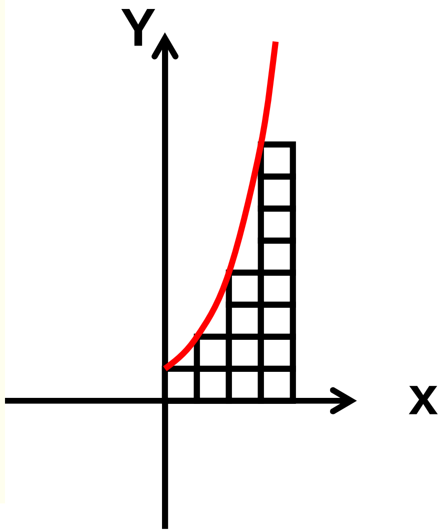
1 In gleich langen Zeitintervallen vergrößert sich die Zahl der Bakterien um den gleichen Faktor.
2 Zu Beginn besteht die Kultur aus 1000 Bakterien.
3 Während jeder Stunde verdoppelt sich die Zahl der Bakterien.

Zu Beginn (zur Zeit 0) gibt es $1000 = 1000 \times 2^0$ Bakterien.
Nach 1 Stunde gibt es doppelt so viele Bakterien, also $1000 \times 2 = 1000 \times 2^1$ Stück.
Nach 2 Stunden ist ihre Anzahl wieder um einen Faktor 2 gewachsen, d.h. es gibt nun $1000 \times 2 \times 2 = 1000 \times 2^2$ Stück.
Nach 3 Stunden gibt es $1000 \times 4 \times 2 = 1000 \times 2^3$ Stück.





$Y=1000\ 2^x$



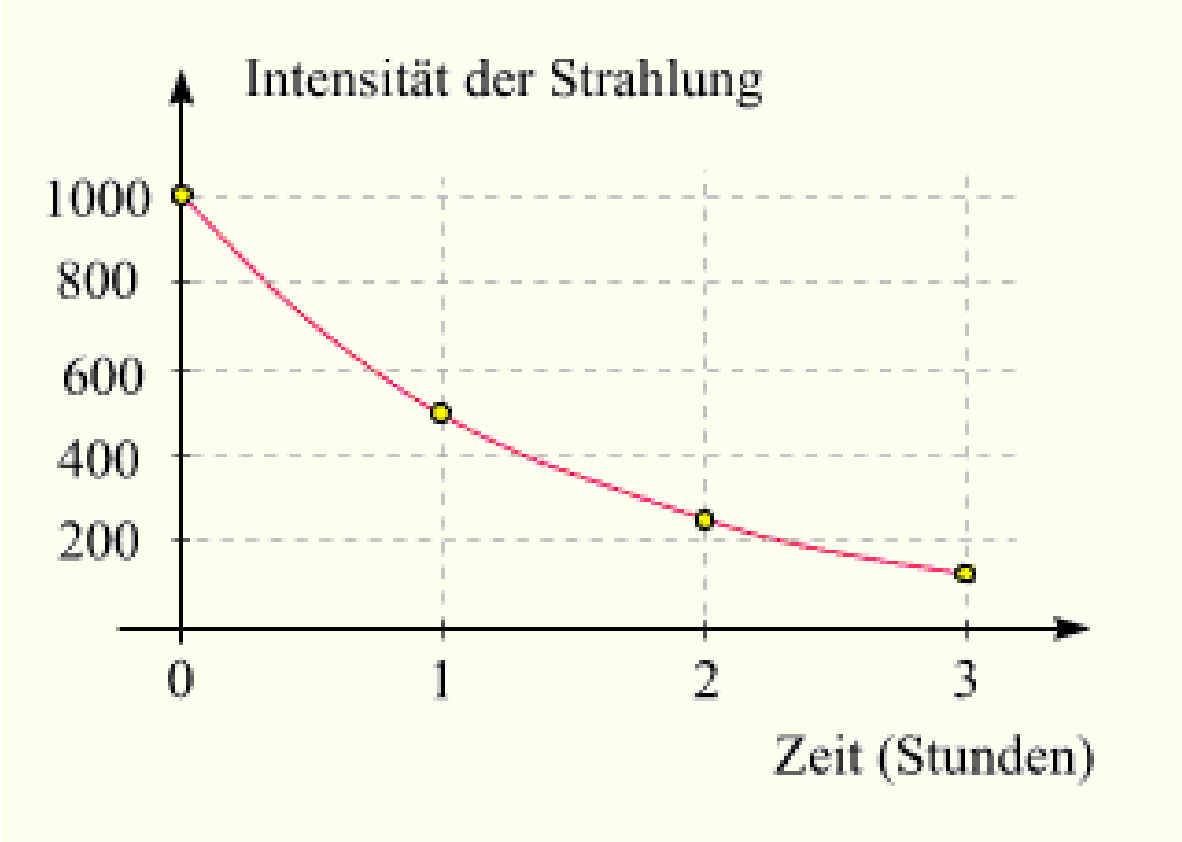
$Y = a^{bx}$

$Y = ca^{bx}$?

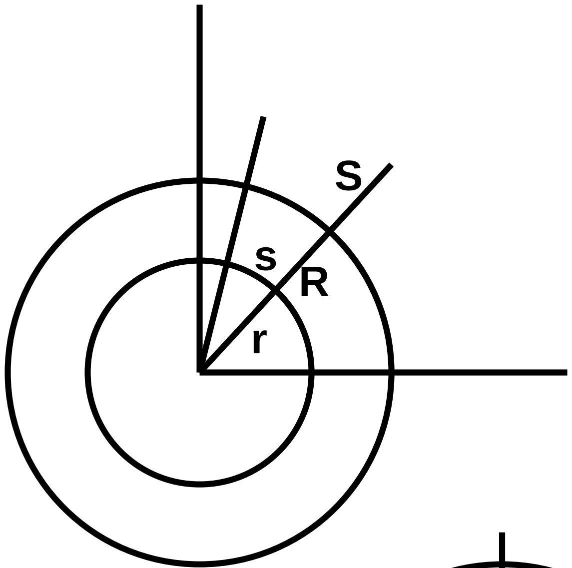
$a^{b+c} = a^b a^c$

$a^{bc} = (a^b)^c$

$b < 0$?



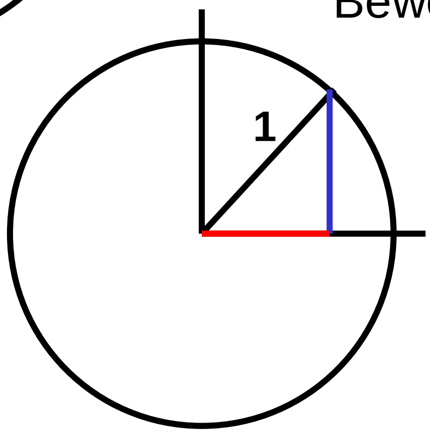
Der Winkel in einem Kreis kann mit dem Bogenmaß gemessen werden:



$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$$

=> Beziehung zum Gradmaß

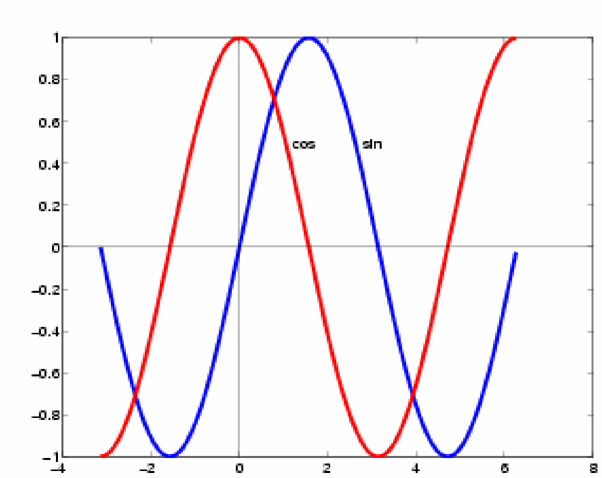
Bewegung im Kreis!



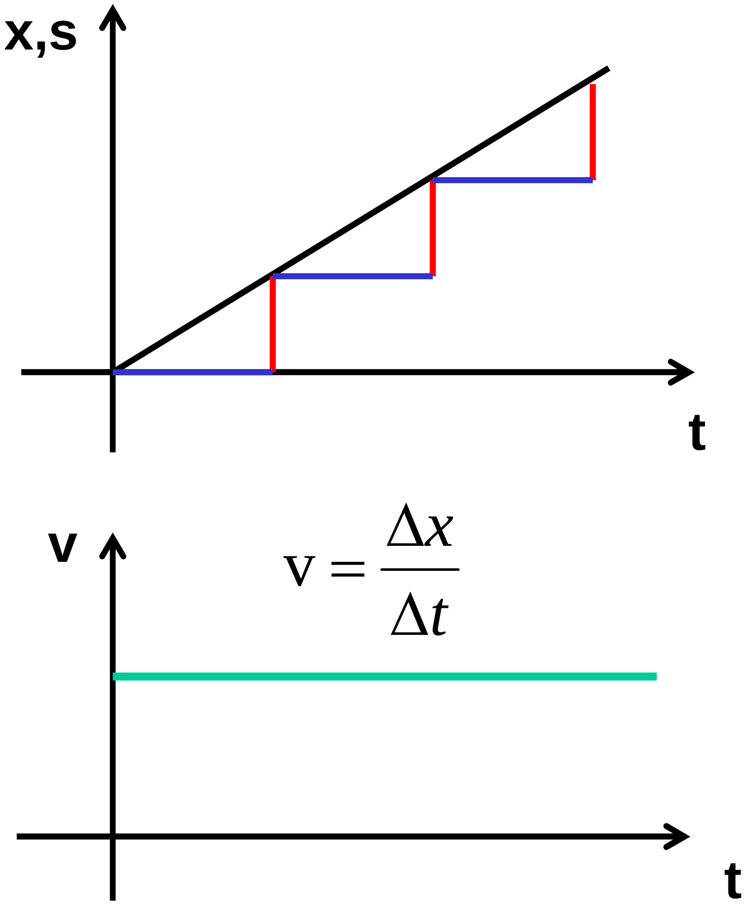
sinus

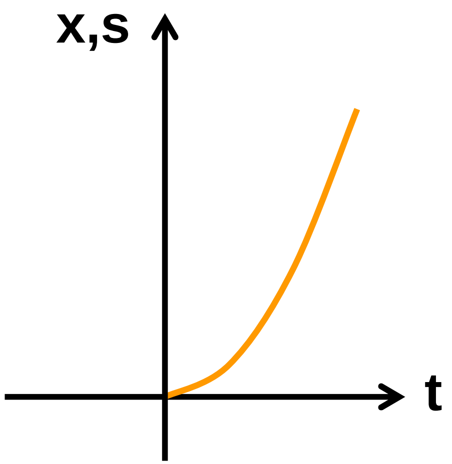
cosinus

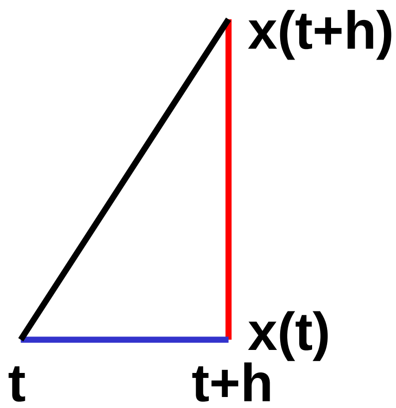
=>Symetrien,
Rechenregeln



Ein Wagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit v(t) =const.,
d. h. pro Zeiteinheit gleiche Strecke!

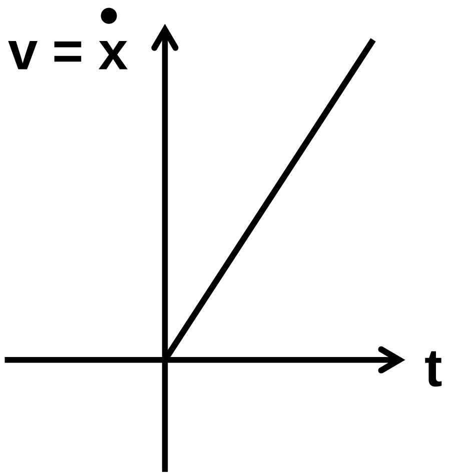


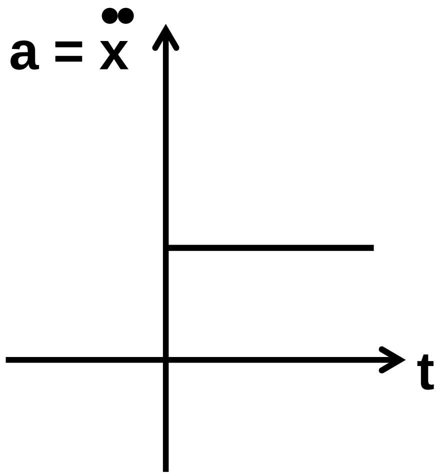




$$v_h = \frac{x(t+h)-x(t)}{t+h-t} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

$$v_h = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{2th + h^2}{h} = 2t + h$$





$$v_{\lim h \to 0} = 2t = \dot{x} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

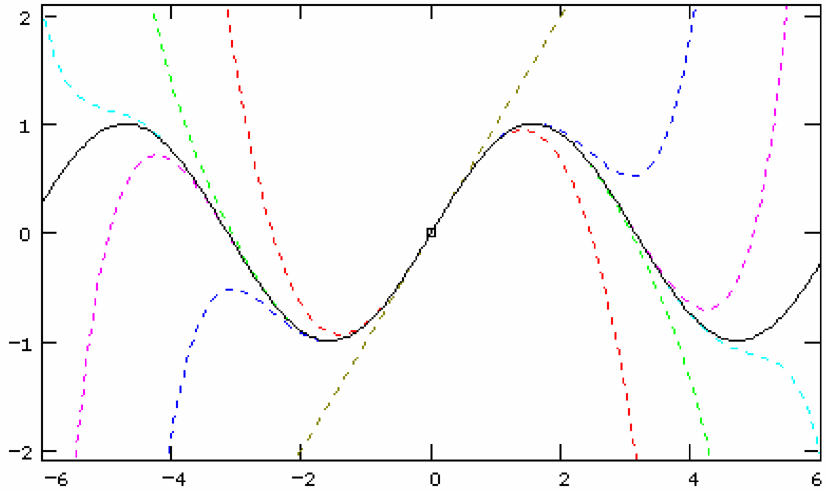
$$\ddot{x} = a \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Allgemein: $f' = \dfrac{df}{dx}$

$$f(x) = c \qquad f'(x) = 0$$

$$f(x) = cx^n \qquad f'(x) = ncx^{n-1}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$



Also: $f(x) = \sum_{i=0}^{N} x_i x^i$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{N-1} i x_i x^{i-1}$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

Übrigens: $(cf)' = cf'$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Produktregel: $$(fg)' = f'g + fg'$$

Beweis? Skizze:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h->0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Quotientenregel: $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel: $$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Exponentialfunktion: $$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon->0} \frac{a^{x+\varepsilon} - a^x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon->0} \frac{a^x a^\varepsilon - a^x}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon->0} \frac{a^x(a^\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = a^x \lim_{\varepsilon->0} \frac{(a^\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = a^x f'(0)$$

Übrigends:
$f(x) = e^x = f'(x)$

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 10$$

Nullstellen: 1

$$f'(x) = 3x^2 + 18x$$

Nullstellen: 0,-6 => Extremstelle

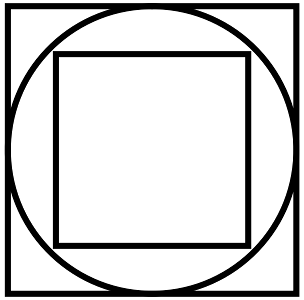
$$f''(x) = 6x + 18$$

Nullstellen: -3 => Wendepunkt

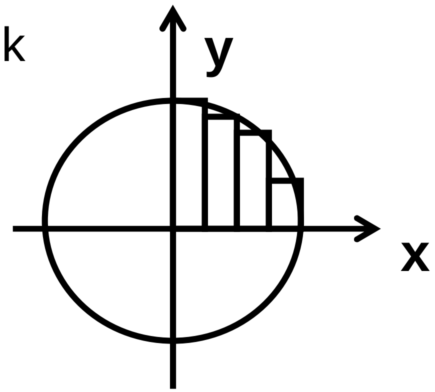
$$f'''(x) = 6$$

Sattelpunkt? Vorzeichen? Symmetrie?

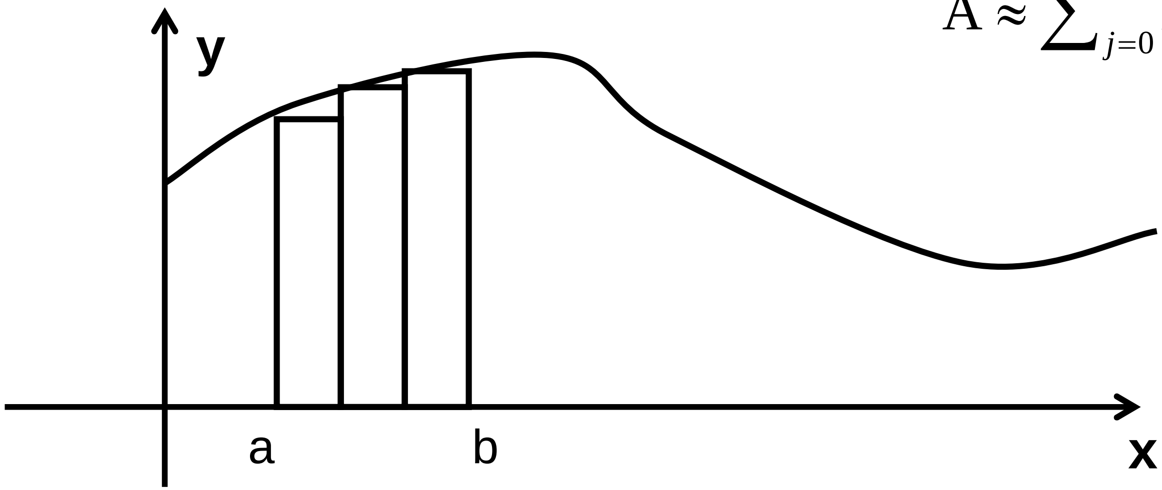
Problem der Griechen (Ägypter...): Die Quadratur des Kreises:



Die Lösung: Salamitaktik



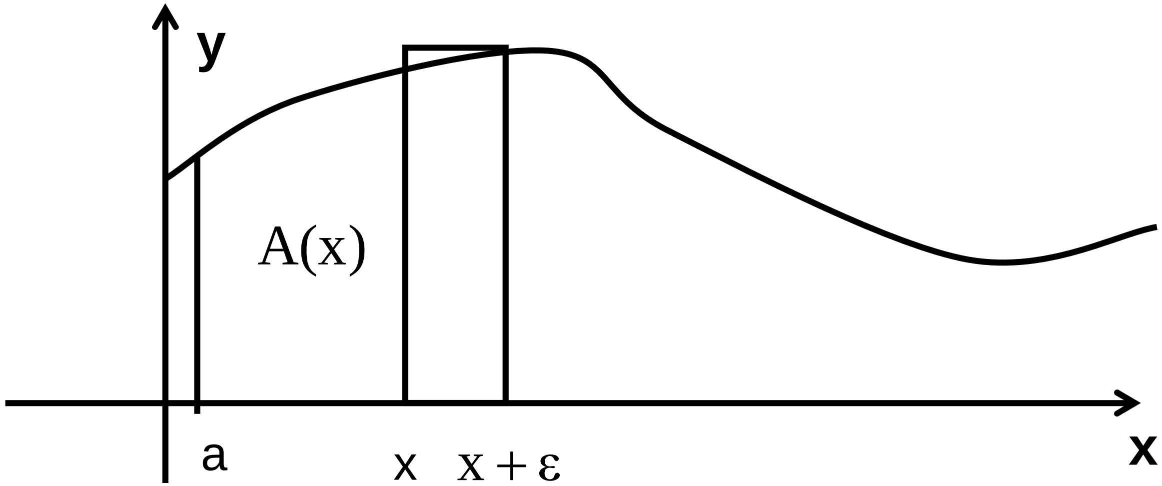
$$A \approx \sum_{j=0}^{N} \Delta x_j f(x_j) = \Delta x \sum_{j=0}^{N} f(x_j)$$



Limes: $A = \int_a^b f(x)dx$

“Motivation” Hauptsatz

$$A(x) = \int_a^x f(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$



$$A(x+\varepsilon) \approx A(x) + f(x+\varepsilon)\varepsilon$$

$$\frac{A(x+\varepsilon) - A(x)}{\varepsilon} \approx f(x+\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(x+\varepsilon) - A(x)}{\varepsilon} = f(x) = A'(x)$$

Die Ableitung der “Flächeninhaltsfunktion” einer Funktion ist die Funktion selber

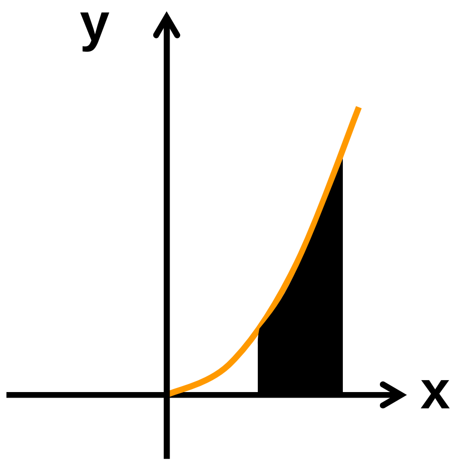
Def. Stammfunktion (vorläufig): F heißt Stammfunktion zu f, wenn F' = f

Der Hauptsatz:

Ist f eine über [a,b] integrierbare Funktion und ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

z.B.: $$\int_a^b x^2 dx = \Big|_a^b \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$



$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad \int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Partielle Integration:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

$$\int \mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = ?$$

$$\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} \qquad \mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{g'(x)} = 1 \qquad \mathrm{F(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \Big|_a^b x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \Big|_a^b x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

Integration durch Substitution

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx$$

$$u = x^2; \quad x = \sqrt{u} \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\int 4x\sin(x^2)dx = \int 4\sqrt{u}\sin u \, {}^{du}\!/_{2\sqrt{u}} = \int 2\sin u \, du = -2\cos u = -2\cos(x^2)$$

Bisherige Probleme: z.B. Nullstellen, Vorgabe Funktion, Ableitung bilden, ect.: $\mathrm{f(x)=e^x}$

Was ist das?: $\mathrm{f(x)=f'(x)}$ Lösung?!, z.B.: $\mathrm{f(x)=e^x}$

Lösungen von Differentialgleichungen sind Funktionen!

! Achtung, was ist hier x? x = x(t)

Beispiel aus der Physik: $F = ma = m\ddot{x}$ $F = F(c, x, \dot{x}, \ddot{x})$

...eigendlich ist F ein Vektor

z. B. Reibung: F $\mathrm{F \sim -v}$ $F = -c\dot{x}$ also DGL: $-c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = e^{-\frac{c}{m}t} \qquad \Rightarrow x(t) = -\frac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}$$

Randbedingungen: v(t=0)

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x)$$

b(x)=0 =>homogene DGL

$a_i(x) = a_i$ =>konstante Koeffizienten;

Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Üble Differentialgleichungen, z.B.: $x^2 + y'''(x)y(x) + xy' = 1$

Schwingungsgleichung:

$$F = -dx \qquad -dx = m\ddot{x} \qquad \frac{d}{m}x + \ddot{x} = 0 \qquad x(t)?$$

Def.: $i^2 \equiv -1$ “Daraus folgt”: $\sqrt{-1} = i$ Achtung, gilt nicht umgekehrt!

$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

reeller Anteil komplexer Anteil

Komplexe Zahlen sind zusammengesetzt: $a + bi$

Daher Darstellung in der Ebene! komplexe Zahlenmenge $\mathbb{C}$

Rechenregeln: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$(a+bi)^2 = a^2 + abi + bia - b^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)}i$$

[Bearbeiten]

Konstruktion der komplexen Zahlen und Begründung der "a+bi"-Schreibweise

So einfach die obige Definition der komplexen Zahlen anmutet, ist es doch folgender axiomatischer Zugang zu den komplexen Zahlen, der erst die Legitimation der "a+bi"-Schreibweise begründet.

[Bearbeiten]

Axiomatische Definition

Die axiomatische Definition nimmt zunächst keinerlei Bezug auf die imaginäre Einheit i: Im 2-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der geordneten reellen Zahlenpaare $z = (a,b)$ wird neben der Addition

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

(das ist die gewöhnliche Vektoraddition) eine Multiplikation durch

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$$

definiert.

Nach dieser Festlegung schreibt man $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird zu einem Körper, dem **Körper der komplexen Zahlen**.

[Bearbeiten]

Erste Eigenschaften

- Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ a \mapsto (a, 0)$ ist eine Körpereinbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, vermöge derer wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a,0)$ identifizieren.
- Die Zahl $0 = (0,0)$ ist das Nullelement von $\mathbb{C}$.
- Die Zahl $1 = (1,0)$ ist das Einselement von $\mathbb{C}$.
- Das multiplikative Inverse (Reziproke) zu $z = (a,b) \neq 0$ ist $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

[Bearbeiten]

Begründung der "a+bi"-Notation (algebraischen Form)

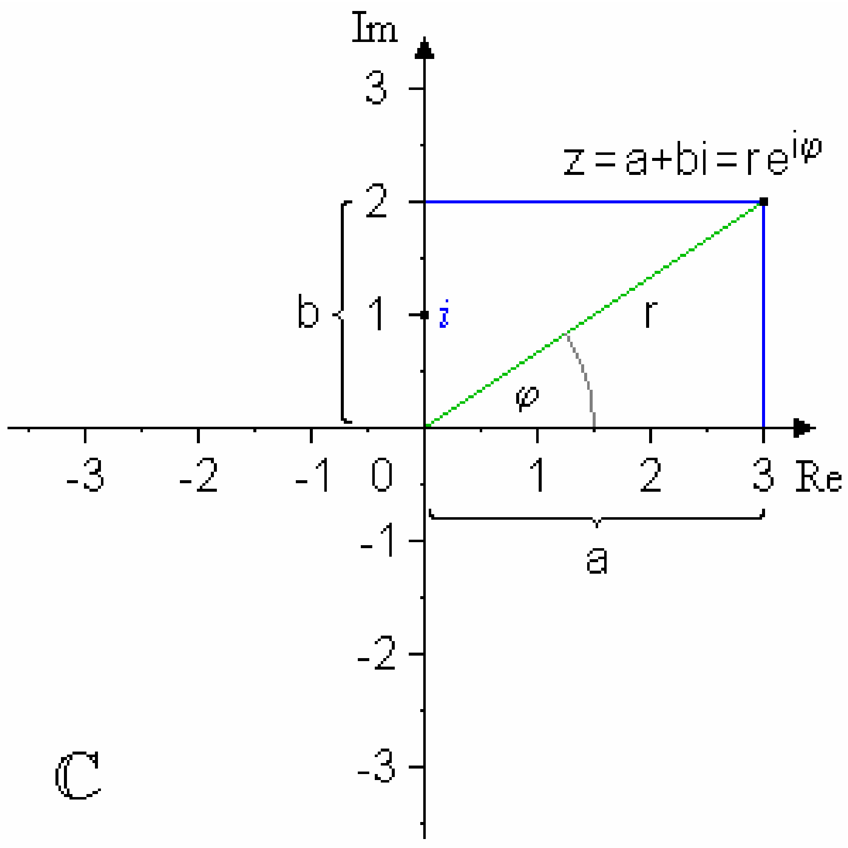
Durch $\mathrm{i} = (0,1)$ wird die **imaginäre Einheit i** festgelegt; für diese gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

Jede komplexe Zahl $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ besitzt die *eindeutige* Darstellung der Form

$$z = (a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + b\mathrm{i}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$; dies ist die übliche Schreibweise für die komplexen Zahlen.

http://de.wikipedia.org/
Suche: komplexe Zahlen



Polar und Exponentialform:
Jede komplexe Zahl z=a+bi kann in der Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geschrieben werden!

$$e^{i\varphi} \equiv \sum \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

Also: $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Polarform, Trigonometrische Form!

Wozu? $x + \frac{m}{d}\ddot{x} = 0 \; Lösung : x(t) = Ae^{ibt}$

Beispiel

Komplexe Zahlen in der angewandten Mathematik

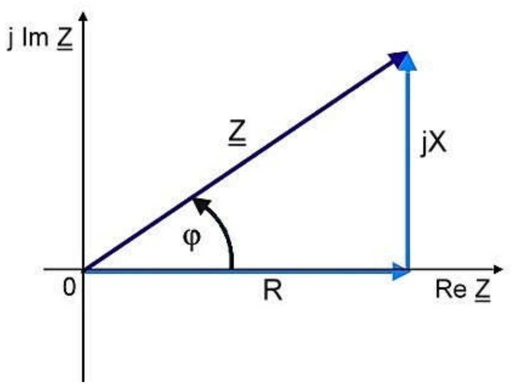
[Bearbeiten]

Komplexe Zahlen haben in der Physik und Technik eine wichtige Rolle als Rechenhilfe. So lässt sich insbesondere die Behandlung von Differentialgleichungen zu Schwingungsvorgängen vereinfachen, da sich damit die komplizierten Beziehungen in Zusammenhang mit Produkten von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch Produkte von Exponentialfunktionen ersetzen lassen, wobei lediglich die Exponenten addiert werden müssen. So fügt man dazu beispielsweise in der komplexen Wechselstromrechnung willkürliche aber passende Imaginärteile in die reellen Ausgangsgleichungen ein, die man bei der Auswertung der Rechergebnisse dann wieder ignoriert. Es handelt sich dabei lediglich um einen Rechentrick ohne philosophischen Hintergrund.

In der Fluiddynamik werden komplexe Zahlen eingesetzt, um ebene Potentialströmungen zu erklären und zu verstehen. Jede beliebige komplexe Funktion eines komplexen Arguments stellt immer eine ebene Potenzialströmung dar - der geometrische Ort entspricht dem komplexen Argument in der gaußschen Zahlenebene, das Strömungspotenzial dem Realteil der Funktion, und die Stromlinien den Isolinien des Imaginärteils der Funktion mit umgekehrtem Vorzeichen. Das Vektorfeld der Strömungsgeschwindigkeit entspricht der konjugiert komplexen ersten Ableitung der Funktion. Durchs Experimentieren mit verschiedenen Überlagerungen von Parallelströmung, Quellen, Senken, Dipolen und Wirbeln kann man die Umströmung unterschiedlicher Konturen darstellen. Verzerren lassen sich diese Strömungsbilder durch konforme Abbildung - das komplexe Argument wird durch eine Funktion des komplexen Arguments ersetzt. Beispielsweise lässt sich die Umströmung eines Kreiszylinders (Parallelströmung + Dipol + Wirbel) in die Umströmung eines tragflügel-ähnlichen Profils (Jukowski-Profil) verzerren und die Rolle des tragenden Wirbels an einer Flugzeug-Tragfläche studieren. So nützlich diese Methode zum Lernen und Verstehen ist, zur genauen Berechnung reicht sie im allgemeinen nicht aus.

Beispiel: Elektrotechnik:

Messung:
Wechselstrom U / I

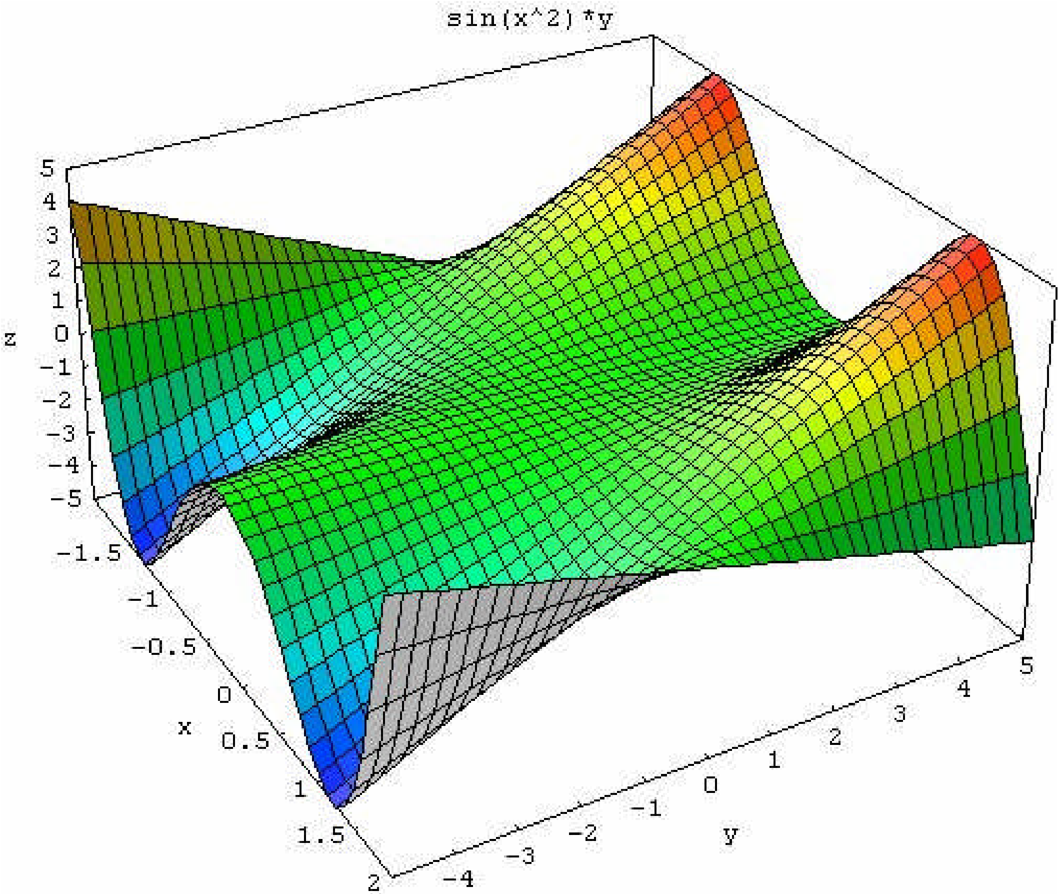


Blindwiderstand X

Wirkwiderstand R

Scheinwiderstand Z

http://de.wikipedia.org/
Suche: komplexe Zahlen



$$z = z(x, y) = (\sin x^2)y$$

4-Dimensional?
z.B. Temperaturverteilung
T=T(x,y,z)

Allgemein: Verschiedene Dimensionalität

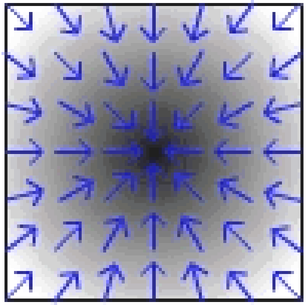
$$\Re^n -> \Re^m$$

z.B. Kraft F: 3D->3D;

F=<u>F</u>=**F**= $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix}$

Mehrdimensionale Ableitung: E=Fs $\mathrm{E} = \int_s \mathrm{F ds}$ F=Vektorfeld!?

F=Vektorfeld!? Beispiel 2D->2D: Energie als Potentialfeld(2D->1D), Gebirge



z.B. “Potentialtopf” $E(x,y) = x^2 + y^2$

Welche Kraft wirkt? Wohin rollt ein Ball?

$E(x,y) = x^2 + y^2$

Richtung des größten Abstieges!

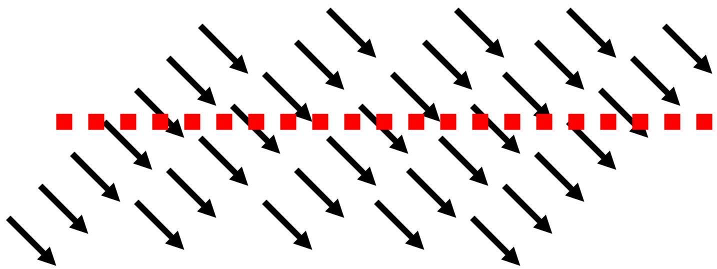
Richtungsableitung: $\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{dE}{dx} \\ \frac{dE}{dy} \end{pmatrix}$ ->allgemein

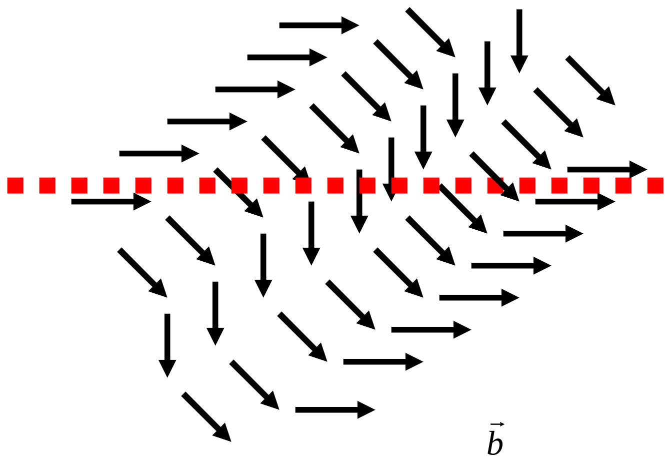
Mehrdimensionale Ableitung / Wegintegral

$$E(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \vec{F} = -\begin{pmatrix} \dfrac{dE}{dx} \\ \dfrac{dE}{dy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

allgemein: $\vec{F} = -\begin{pmatrix} \dfrac{dE}{dx} \\ \dfrac{dE}{dy} \\ \dfrac{dE}{dz} \end{pmatrix}$

Anders herum ? Wegintegral!

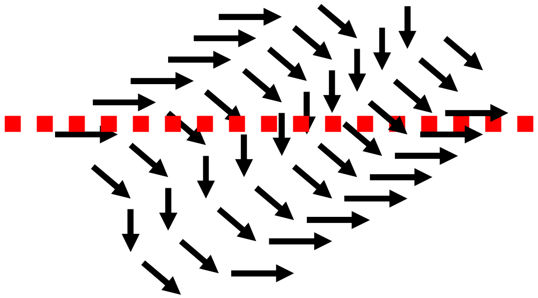




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} N \qquad \left|\vec{F}\right| = \sqrt{4}N$$

s = 10m E= Fs= 2N 10m= 20 J

$$E = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(s)\, d\vec{s}$$

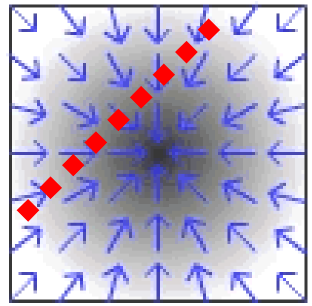


$$E = \int_a^b \vec{F}(\vec{s}(\tau))d\vec{s}(\tau) = \int_a^b F(\vec{s}(\tau))\frac{d\vec{s}(\tau)}{d\tau}d\tau$$

Beispiel:

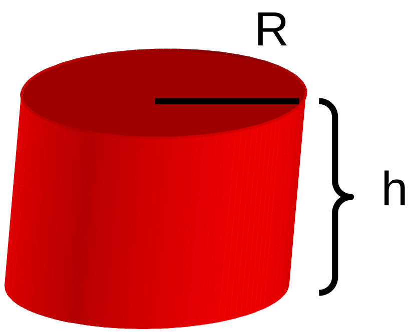
$$E(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{dE}{dx} \\ \frac{dE}{dy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

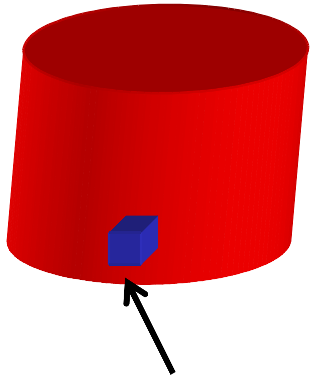
Weg: Y(x)=x+1



$$E = -\int \begin{pmatrix} 2\tau \\ 2\tau + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau + 1 \end{pmatrix}' d\tau = -\int \begin{pmatrix} 2\tau \\ 2\tau + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = -\int 4\tau + 2\, d\tau = -\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} 2\tau^2 + 2\tau$$

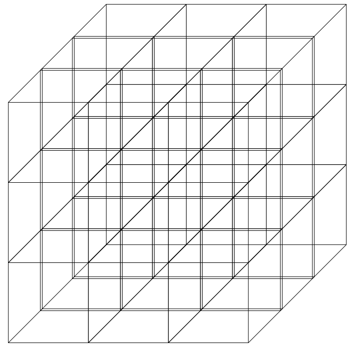
Die Dose:





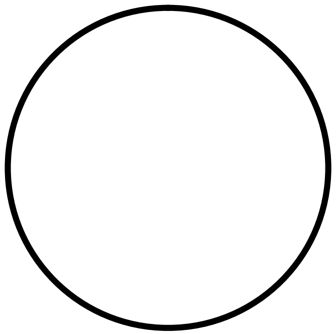
$$V = \pi R^2 h$$

Salamitaktik



Würfel:

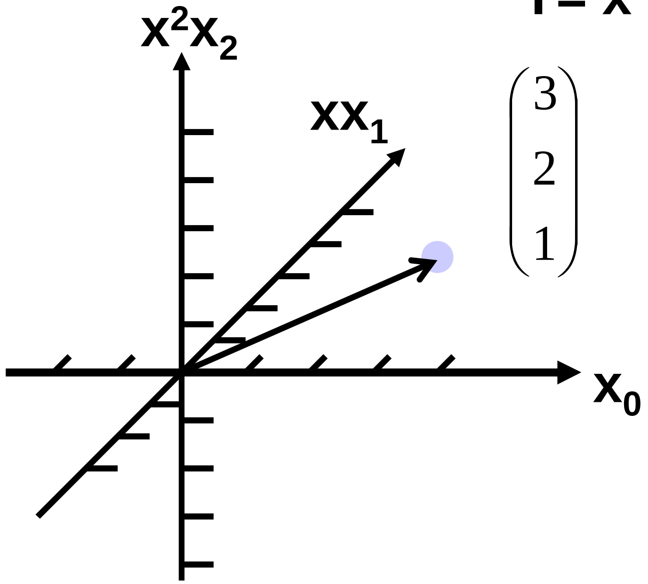
$$V = a^3 = \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$



$$A = 4\iint d\tau_1 d\tau_2 = \int_{\tau_1=0}^{R} \int_{\tau_2=0}^{\sqrt{R^2-\tau_1{}^2}} d\tau_1 d\tau_2$$

Funktionsräume

$Y = x_2 x^2 + x_1 x + x_0$



Als vektor?!

$Y = x^2 + 2x + 3$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} "c" \\ "x" \\ "x^2" \end{pmatrix}$$

unendlich Dimensional:

$$\begin{pmatrix} "c" \\ "x" \\ "x^2" \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

mit dem so genannten n-ten **Taylorpolynom** an der Entwicklungsstelle a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

und dem so genannten (n+1)-ten **Restglied**

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \, .$$