

Zur Vorlesung „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Online-Lesehilfe 8: Dielektrika und Optik (Hauptteil 1)

Inhalt

Unterkapitel 6.3: Polarisation und Polarisationsmechanismen

6.3.1 Ein paar wichtige Begriffe und Definitionen

6.3.2 Polarisationsmechanismen

6.3.3 Verallgemeinerung des Begriffs „Dielektrikum“

Unterkapitel 6.4: Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante

6.4.1 Der Grundversuch

6.4.2 Der Frequenzgang der (komplexen) Dielektrizitätskonstante für Resonanz

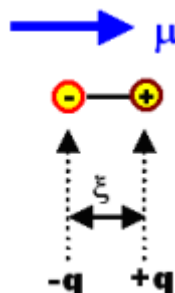
Unterkapitel 6.3: Polarisation und Polarisationsmechanismen

In diesem Unterkapitel kommen wir zum einen Teil des Kerninhalts dieses Kapitels, den Polarisationsmechanismen; der andere Teil ist deren Frequenzabhängigkeit (Unterkap. 6.4).

6.3.1 Ein paar wichtige Begriffe und Definitionen

Wir bleiben zunächst dabei, daß Dielektrika immer auch Isolatoren sind; das werden wir aber demnächst erweitern. Vorerst betrachten wir Isolatoren, weil es dort die dielektrischen Effekte in Reinkultur gibt, denn in Isolatoren gibt es keine beweglichen und damit frei verschiebbaren Ladungen. Das ist wichtig, weil wir ja das Dielektrikum einem elektrischen Feld aussetzen wollen und alle Ladungen q im E-Feld eine Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$ erfahren. Das Feld wird die in den Atomen etc. des Materials vorhandenen Ladungen leicht verschieben, was insbesondere bedeutet, daß positive und negative Ladungen *gegeneinander* verschoben werden, so daß die Ladungsschwerpunkte nicht mehr zusammenfallen. Eine solche Konfiguration, daß eine gleich große positive und negative Ladung q sich einem kleinen Abstand $|\underline{\xi}|$ voneinander befinden, nennet man einen **elektrischen Dipol**; sein **Dipolmoment** ist der Vektor $\underline{\mu} = q\underline{\xi}$ (Achtung: auch $\underline{\xi}$ ist ein Vektor; der Unterstrich ist leider kaum zu sehen), wobei der Vektor $\underline{\mu}$ **von der negativen zur positiven** Ladung zeigt (siehe die nachfolgende Abbildung).

Weil es bei einem Material, bevor es ins elektrische Feld kommt, bezüglich der elektrischen Dipole nur zwei Möglichkeiten gibt – daß es bereits welche enthält oder aber nicht –, gilt folgende allgemeine Regel: **Ein externes elektrisches Feld wird in einem Dielektrikum immer Dipole hervorrufen und zusätzlich die eventuell vorhandenen Dipole verändern.**



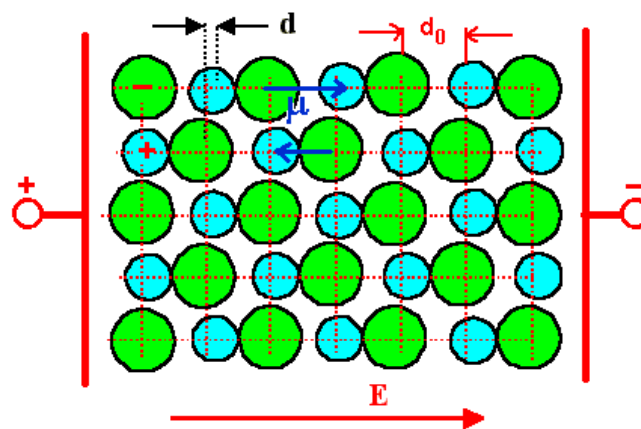
Der daraus zunächst resultierende Effekt heißt **Polarisation** $\underline{P}$ des Dielektrikums. Die Polarisation eines Materials mit dem Volumen V ist definiert als seine **Dipolmomentendichte**:

$$\underline{P} = \frac{\sum \underline{\mu}}{V} = \langle \underline{\mu} \rangle \cdot N_V$$

Dabei ist $\langle \underline{\mu} \rangle$ = durchschnittliches oder Netto-Dipolmoment = $\sum \underline{\mu} / \text{Anzahl der Dipole}$, und N_V steht für die Dichte der Dipole (pro cm^3). Weil es so wichtig ist, sei es nochmals betont:

Die Polarisation $\underline{P}$ ist also nichts anderes als der Nettoeffekt aller vektoriell aufsummierten Dipole pro cm^3 .

Es gibt zwar Materialien, die auch ohne äußeres Feld bereits eine makroskopische Polarisation aufweisen (ein andermal mehr dazu). Der Normalfall ist aber, daß sich ohne äußeres Feld alle evtl. im Material vorhandenen Dipole in ihrer Gesamtwirkung zu null wegmitteln. Die Polarisation eines solchen Materials ändert sich und wird nicht mehr null sein, sobald wir ein äußeres Feld einschalten. Ein Ionenkristall sieht dann beispielsweise so aus:



Wie eingezeichnet, zieht das Feld die negativ geladenen Cl^- -Ionen (grün) etwas nach links, die positiv geladenen Na^+ -Ionen (türkis) etwas nach rechts. Die beiden eingezeichneten Dipolmomente, die ohne Feld entgegengesetzt gleich groß waren, sind jetzt verschieden, da die Abstände $|\xi_0|$ sich um $\pm|\Delta\xi|$ geändert haben. Allgemein formuliert man es so: **Ein externes elektrisches Feld polarisiert ein Dielektrikum.** Bei den allermeisten Materialien findet man experimentell, daß diese von außen hervorgerufene Polarisation linear mit der Feldstärke zunimmt (zumindest bei nicht zu großen Feldstärken). Diese Proportionalität wird mittels der dielektrischen *Suszeptibilität* χ quantifiziert (ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante): $\underline{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \underline{E}$.

Was hat das alles mit der Dielektrizitätskonstante ϵ_r zu tun? Sehr einfach: Weil ganz allgemein für die elektrischen Feldgrößen der Zusammenhang $\underline{D} = \epsilon_0 \cdot \underline{E} + \underline{P}$ gilt, hat man wegen $\underline{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \underline{E}$ den Zusammenhang $\epsilon_r = \chi + 1$. Das bedeutet, daß **die dielektrischen Eigenschaften eines Materials von den in ihm enthaltenen Dipolmomenten** herrühren.

6.3.2 Polarisationsmechanismen

Im Grunde müssen wir uns nur vier grundsätzliche Polarisationsmechanismen anschauen:

Grenzflächenpolarisation – Grenzflächen wie Korngrenzen, Phasengrenzen usw. sind oft geladen und enthalten unkomensierte Dipole (schon weil es zum Beispiel in Ionenkristallen gar nicht anders geht).

Atompolarisation (manchmal auch elektronische Polarisation genannt) – Ein elektrisches Feld zieht immer die „Elektronenwolke“ eines Atoms in eine Richtung und den Atomkern in die andere. Als Effekt liegen die Ladungsschwerpunkte nicht mehr aufeinander; ein elektrisches Dipolmoment liegt vor, wo vorher keins war.

Ionische Polarisation – In diesem Fall muß die Bindung einen ionischen Anteil haben, d. h. die Atome sind mehr oder weniger geladen. Was dann im Prinzip passiert, haben wir uns schon angeschaut: Die vorhandenen Dipole werden größer oder kleiner, heben sich also nicht mehr perfekt gegenseitig auf; es bleibt ein Netto-Dipolmoment übrig.

Orientierungspolarisation – Sie funktioniert mit elektrischen Dipolen nur bei Flüssigkeiten, die aus polaren Molekülen bestehen, d. h. aus Molekülen mit einem festen Dipolmoment, wie z. B. H_2O . In einer Flüssigkeit kann sich das Dipolmoment zusammen mit dem Molekül in alle mögliche Richtungen drehen. Bei Wasser ohne elektrisches Feld mit wild herumwirbelnden Wassermolekülen werden auch alle Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen. Mit elektrischem Feld werden die Dipolmomente alle etwas in Feldrichtung gedreht; wiederum bleibt ein Netto-Dipolmoment übrig.

Der letzte Mechanismus, die Orientierungspolarisation, interessiert uns hier aus zwei Gründen, obwohl wir uns sonst eher nicht mit Flüssigkeiten abgeben: Zum einen ist er in (mathematisch) exakt identischer Weise der wichtigste Mechanismus, wenn wir nicht elektrische, sondern magnetische Dipole anschauen, d. h. magnetische Materialien betrachten. Deshalb nehmen wir ihn hier gleich mit, und deshalb behandeln wir den Magnetismus gleich im nächsten Kapitel. Zum anderen steckt er hinter dem, was in der „Mikrowelle“ passiert.

Schauen wir uns nun die vier grundsätzlichen Polarisationsmechanismen im Detail an:

a) Grenzflächenpolarisation

In der praktischen Anwendung ist die Grenzflächenpolarisation wichtig, aber sie kann nicht einfach berechnet werden, denn sie hängt von vielen Dingen ab. Dielektrika mit großer Suszeptibilität bzw. Dielektrizitätskonstanten in billigen Kondensatoren nutzen die Grenzflächenpolarisation in zusammengesintertem Zeugs mit kleinen Körnern und daher vielen Grenzflächen. Sie sind billig, weil ihr Frequenzverhalten, Durchbruchverhalten und sonstige Qualitätsmerkmale nicht spitze sind. Und das liegt auch am Dielektrikum! In integrierten Schaltungen sind ungewollte Ladungen an den vielen Grenzflächen – die Ursache für die Grenzflächenpolarisation – oft absolut tödlich. Ein Großteil der Forschung und Technik im Bereich Mikroelektronik oder Solarzellen (dort geht es aber meist um gewollte Ladungen an bestimmten Grenzflächen) dreht sich um dieses Phänomen (das dann allerdings üblicherweise unter anderen Bezeichnungen läuft). Mehr dazu brauchen wir erst mal nicht zu wissen.

b) Atompolarisation (manchmal auch elektronische Polarisation genannt)

Stecken wir mal gedanklich ein stark vereinfachtes sphärisches Atom in ein elektrisches Feld. Was passiert dann? Ein elektrisches Feld zieht immer die „Elektronenwolke“ eines Atoms in eine Richtung und den Atomkern in die andere. Damit liegen die Ladungsschwerpunkte nicht mehr aufeinander, und also gibt es nun ein elektrisches Dipolmoment, wo vorher keins war. Liegen die Ladungsschwerpunkte um $|\xi|$ auseinander, beträgt das Dipolmoment $|\underline{\mu}| = Z e |\xi|$ (mit der Kernladungszahl bzw. Ordnungszahl Z und der Elementarladung e). Dabei zieht das äußere Feld $\underline{E}$ die Ladungen auseinander, die innere Coulombwechselwirkung zieht sie zurück – ganz so, als ob die Ladungen durch eine Feder gekoppelt wären. Das Kräftegleichgewicht bestimmt, wie groß $|\xi|$ ist. Ohne groß zu rechnen, können wir für $|\xi| \ll R$ (d. h. für Verschiebungen, die sehr viel kleiner als das Atom selbst sind) vermuten, daß ξ (und damit $\underline{\mu}$) proportional zu $\underline{E}$ ist; die genaue Rechnung überlassen wir einer Übungsaufgabe.

Wegen des Vorhandenseins der Rückstellkraft (durch die innere Coulombwechselwirkung) haben wir bereits eine Ahnung davon, wodurch der Frequenzgang dieses Polarisationsmechanismus bestimmt ist: Wenn wir ein elektrisches Wechselfeld mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ anlegen, wackeln wir periodisch an einer kleinen Masse (die der Elektronenwolke), die über

eine „Feder“ an einem sehr schweren Gegenstand (dem Atomkern) hängt. Bei irgendeiner Frequenz sollte dann Resonanz auftreten – eben genau so, wie wir es von einer Masse an einer Feder kennen. Auf die Details kommen wir aber erst im nächsten Unterkapitel zu sprechen.

Wie relevant ist die Atompolarisation in der Praxis? Anders gefragt: Bei welchen Materialien rührt die Suszeptibilität bzw. Dielektrizitätskonstante überwiegend von diesem Mechanismus her? Eines ist klar: Atompolarisation funktioniert *immer*. Ein Teil der Suszeptibilität bzw. Dielektrizitätskonstante jedes Materials kommt von diesem Polarisationsmechanismus. Bei halbwegs sphärischer Verteilung der Elektronen um ein Atom ist der Mechanismus aber schwach. Die Dielektrizitätskonstante der Edelgase ist z. B. nur unwesentlich größer als 1. Bei nicht-sphärischer Verteilung der Elektronen, wie z. B. in den kovalenten Bindungen aller relevanten Halbleiter, ist der Effekt dagegen sehr stark: *Die Suszeptibilität bzw. Dielektrizitätskonstante von Halbleitern wie Silizium kommt überwiegend von der Atompolarisation.* Folgende Werte vermitteln einen Eindruck von der relevanten Größenordnung: $\epsilon_r(\text{Si}) = 12$, $\epsilon_r(\text{Ge}) = 16$.

c) Ionische Polarisation

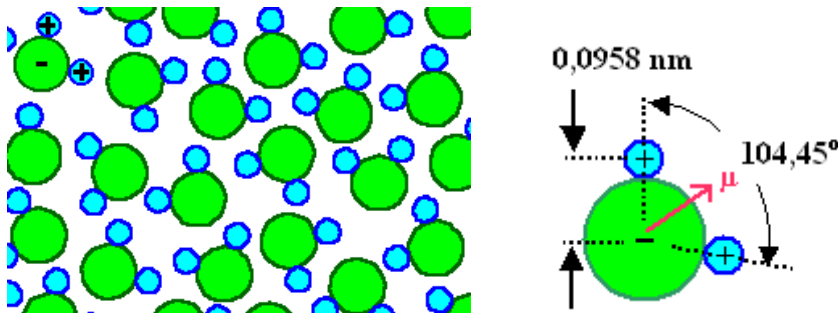
In diesem Fall muß die Bindung einen ionischen Anteil haben, d. h. die Atome sind mehr oder weniger geladen. Das betrifft nicht nur reine Ionenkristalle wie NaCl oder LiF, sondern alle Kristalle mit ionischer Komponente, wie z. B. GaN oder SiO₂ oder so gut wie alle anderen Oxide (die Sauerstoffatome binden die Elektronen fast immer etwas fester als der Rest, sind also netto etwas negativ geladen). Wie zuvor gilt: Das Feld zieht die vorhandenen Dipole auseinander oder drückt sie zusammen – es bleibt ein Netto-Dipolmoment übrig. Weil dabei die Atome als Ganzes gegeneinander verschoben werden, zieht oder drückt das Feld gegen die „Bindungspotentialfeder“. So etwas kennen wir von der Besprechung der elastischen Eigenschaften im 2. Kapitel: Die effektive Federkonstante einer interatomaren Bindung ist Elastizitätsmodul E mal Gleichgewichts-Atomabstand r_0 , also ist die tatsächlich wirkende Kraft, wie gehabt, Federkonstante mal Verschiebung, zusammen $E r_0 |\xi|$. Die vom externen Feld ausgeübte elektrische Kraft hängt nur von der Partialladung q der Ionen (bzw. dem entsprechenden ionischen Anteil einer ansonsten kovalenten Bindung) ab und beträgt $q|\underline{E}|$. (Aufpassen: Als Vektor bedeutet $\underline{E}$ hier das elektrische Feld, als skalare Größe den Elastizitätsmodul E . Im Hyperskript wird für letzteren zwar auf das Größenzeichen Y ausgewichen, aber das bedeutet üblicherweise noch etwas anderes, nämlich den biaxialen Modul.) Damit läßt sich leicht berechnen, bei welcher Auslenkung $|\xi|$ ein Kräftegleichgewicht herrschen wird, denn betragsmäßig sind dann diese beiden Kräfte, Rückstellkraft und Feldkraft, genau gleich groß:

$$E r_0 |\xi| = q |\underline{E}| \Rightarrow \xi = q |\underline{E}| / (E r_0).$$

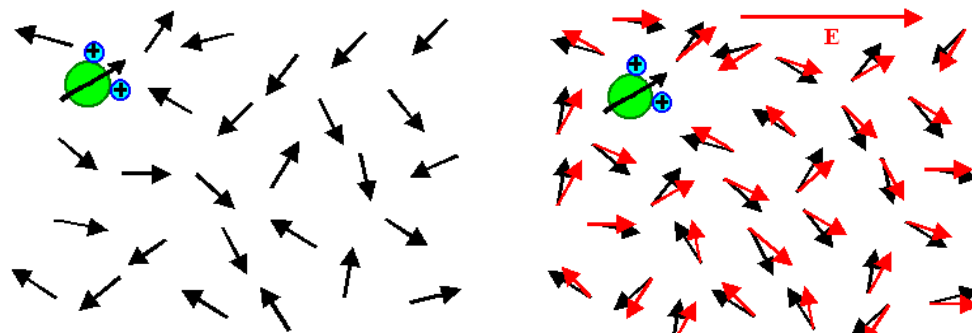
Damit können wir im Prinzip die dielektrischen Eigenschaften von Ionenkristallen berechnen; das zu wissen, genügt uns aber bereits. Wir tun es nicht, sondern nehmen nur noch zur Kenntnis, daß der Effekt groß sein kann; Zahlenwerte sind in der Tabelle „Statisches ϵ_r “ im Abschnitt 6.1.2 des Hyperskripts zu finden.

d) Orientierungspolarisation

Die Modellsubstanz für diesen Polarisationsmechanismus ist Wasser. Wir betrachten wieder eine Momentaufnahme mit ganz kurzer Belichtungszeit. Die Wassermoleküle sind in ständiger Bewegung – sie laufen und rotieren; wir wissen im Prinzip sogar, wie schnell! (Näheres dazu in der Aufgabe 6.3-1 im Hyperskript.) Die wassereigenen Dipole führen also einen rasenden Tanz auf: Ihr Dipolmoment macht einen „random walk“ bezüglich der Richtung und des Ortes. Die Vektorsumme aller Dipolmomente ergibt sich damit zu null. (Ergäbe sich nicht der Wert null, wäre es kein „random walk“ gewesen!) Die folgende Abbildung zeigt die versprochene Momentaufnahme:



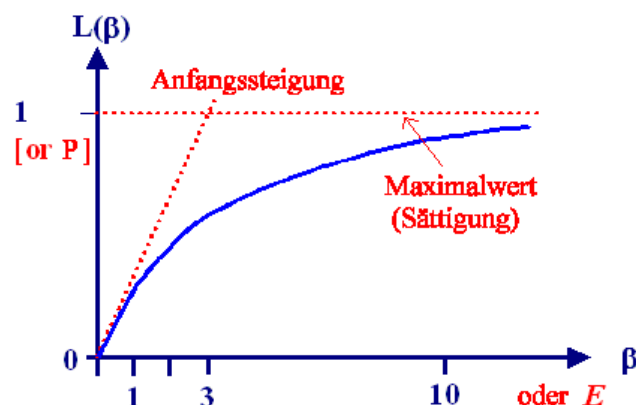
Schalten wir zusätzlich ein elektrisches Feld ein, wird sich jeder Dipol tendenziell in Feldrichtung ausrichten: Sein positiver Kopf will sich so nahe als möglich zum negativen Feldpol orientieren, denn er wird von ihm angezogen, sein negativer Hintern aus denselben Gründen zum positiven Pol. Dazu muß der Dipol rotieren. Dazu hat er aber nicht viel Zeit: Sobald das Molekül mit einem Kollegen kollidiert, haut's den Dipol wieder in eine Zufallsrichtung. Der Nettoeffekt ist bei realen Flüssigkeiten und realen Feldstärken (maximal um 10 MV/cm) einerseits sehr klein, d. h. die Vektorsumme ist nur leicht von null verschieden, andererseits groß genug, um große Suszeptibilitäten zu machen – Wasser hat schließlich eine Dielektrizitätskonstante von um die 80! Es sieht schematisch etwa so aus (links ohne, rechts mit externem elektrischen Feld, hier in Rot):



Die Berechnung der Orientierungspolarisation ist zwar nicht besonders schwierig, aber trickreich und aufwendig. Es ist mal wieder die freie Energie des Systems zu minimieren, um den Gleichgewichtszustand zu finden, denn die Ausrichtung der Dipole im Feld verringert sowohl ihre potentielle Energie als auch ihre Entropie – ein System mit ausgerichteten Dipolen ist ordentlicher als eines mit statistisch verteilten Dipolen. Die Details der Rechnung sind im Hyperskript verlinkt; man landet am Ende bei der Langevin-Funktion $L(\beta) = \coth(\beta) - 1/\beta$, wobei hier $\beta = |\underline{\mu}| |\underline{E}| / (k_B T)$ ist. Der Betrag der makroskopischen Polarisation ist damit durch

$$|\underline{P}| = N_V |\underline{\mu}| L(\beta)$$

gegeben (N_V ist die Dichte der Dipole, d. h. Anzahldichte der Wassermoleküle, und $|\underline{\mu}|$ ist der Betrag des Dipolmoments eines einzelnen Wassermoleküls). Hier die Langevin-Funktion:



Was aber war doch gleich mit der Funktion „coth“ gemeint? Das ist der „hyperbolische Kotangens“, also Kosinus hyperbolicus geteilt durch Sinus hyperbolicus. Wie der „normale“ Sinus hat $\sinh(x)$ eine Nullstelle bei $x = 0$, also ist auch der Kotangens hyperbolicus bei $x = 0$ nicht definiert. Asymptotisch verhält sich der hyperbolische Kotangens aber wie die Hyperbel $1/x$ (was bei seinem Namen kein Wunder sein sollte), und weil genau dieser Term in der Langevin-Funktion subtrahiert wird, hat sie keine Polstelle bei $x = 0$ (sondern geht gegen 0).

Bei realistischen Feldstärken (unter ca. 10 MV/cm) und Temperaturen liegt man im Anfangsbereich der $L(\beta)$ -Kurve – von $\beta = 0$ bis $\beta < 1$. Dort ist der Kurvenverlauf linear, und weil β das elektrische Feld als Faktor enthält, gilt in diesem Bereich auch für die Orientierungspolarisation die lineare Proportionalität zur Feldstärke. Daraus kann die Suszeptibilität gewonnen werden, wir benötigen dazu bloß die Anfangssteigung der oben gezeigten Kurve. Die findet man in einschlägigen Lehrbüchern; sie beträgt genau $1/3$. Damit gilt in guter Näherung:

$$|P| = N_V |\mu| L(\beta) \approx N_V |\mu| \beta / 3 = N_V |\mu|^2 |E| / (3k_B T),$$

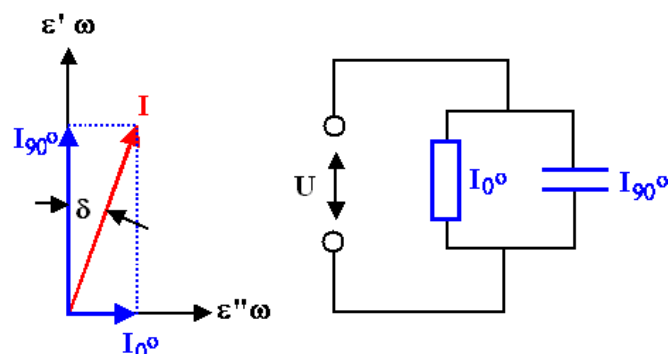
d. h. $\chi = N_V |\mu|^2 / (3k_B T)$. Das ist insofern ein bemerkenswertes Ergebnis, als daß wir damit bereits eine Vorhersage bezüglich der Temperaturabhängigkeit erhalten haben.

6.3.3 Verallgemeinerung des Begriffs „Dielektrikum“

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir einerseits gesagt, daß „Dielektrikum“ erst mal nur ein anderes Wort für Isolator sein soll, aber andererseits haben wir auch Zahlenwerte für die DK (= Abkürzung für „dielektrische Konstante“) von Halbleitern angegeben. Was nun? Halbleiter sind nun mal keine Isolatoren; Standard-Si hat z. B. einen spezifischen Widerstand so um $1 \Omega\text{cm}$. Es ist nun Zeit, das obige „erst mal“ durch ein „darüber hinaus“ zu erweitern.

Für Halbleiter können wir uns im Prinzip noch einfach aus der Patsche helfen: Wir kühlen das halbleitende Material. Spätestens in der Nähe des absoluten Nullpunkts ist es ein guter Isolator. Dann kann man die DK in der gewohnten Weise messen. (Frage an alle: Was ist hier mit der „gewohnten Weise“ gemeint?) Das ist aber sehr umständlich. Statt dessen machen wir aus der Not (daß ein Strom fließen kann, wo keiner sollte) eine Tugend und erinnern uns an die grundsätzlichen Eigenschaften eines idealen Isolators und eines idealen Leiters:

Bei einem idealen Isolator im Plattenkondensator fließt bei anliegender Gleichspannung keine Gleichstromdichte; bei Wechselspannung ist die fließende Wechselstromdichte exakt 90° phasenverschoben zur Spannung. Falls das Material rein ohmsch ist (also eine **Leitfähigkeit** $\sigma = 1/\rho \neq 0$ hat), fließt – je nach angelegter Spannung – Gleichstrom oder Wechselstrom in Phase, d. h. die Phasenverschiebung beträgt exakt 0° . Damit ist klar, daß die Phasenverschiebung folgende Aufschlüsselung ermöglicht: Wir zerlegen gedanklich das Material in seinen ideal-dielektrischen Teil und seinen nicht vernachlässigbaren ohmschen Widerstandsteil, d. h. wir beschreiben es als eine Parallelschaltung aus einem idealen ohmschen Widerstand R und einem idealen Kondensator C . Die tatsächlich gemessene Phasenverschiebung kann anhand des zugehörigen Zeigerdiagramms analysiert werden:



Wie in der Physik üblich, steht das große I für die Stromstärke. Bei einem sehr guten Dielektrikum wird die Phasenverschiebung kaum von 90° abweichen, daher ist die Abweichung von 90° , hier eingezeichnet als Winkel δ , von besonderem Interesse: $\tan \delta = I_{0^\circ} / I_{90^\circ}$ ist eine Art Qualitätsmaß für Dielektrika bzw. Isolatoren; im Idealfall des perfekten Isolators ist δ null.

An den Achsen des Zeigerdiagramms stehen neben den Strömen auch ε' und ε'' . Wie kommt man darauf? Dazu schreiben wir die frequenzabhängige Stromdichte $j(\omega)$ in einem Kondensator hin, der einem elektrischen Wechselfeld $E = E_0 \exp(i\omega t)$ ausgesetzt ist. Von den Maxwellgleichungen her wissen wir, daß dazu eine Verschiebungsdichte $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E$ gehört. Beim idealen Kondensator haben wir aber nur Verschiebungsströme, d. h. $j(\omega) = dD/dt$. Das können wir analytisch ausrechnen und erhalten:

$$j(\omega) = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{d[E_0 \exp(i\omega t)]}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \cdot i\omega \cdot E_0 \exp(i\omega t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \cdot i\omega \cdot E(\omega)$$

Von dieser „Bandwurmformel“ kommt es für unsere Diskussion nur auf das „i“ im letzten Term an, denn als imaginäre Einheit ($i^2 = -1$) sorgt es für die Phasenverschiebung von exakt 90° zwischen Stromdichte (links) und Feldstärke (rechts) – zumindest sofern keine weiteren komplexwertigen Größen in dieser Gleichung beteiligt sind!

Und genau das ist die entscheidende Stelle: Wenn bei einer Messung der Phasenverschiebung für ein reales Dielektrikum im Plattenkondensator nicht exakt 90° herauskommen, kann das im Rahmen dieser Gleichung einfach dadurch berücksichtigt werden, daß die dielektrische Funktion nicht mehr nur rein reellwertig ist. Wir nehmen dann für die (frequenzabhängige) Dielektrizitäts„konstante“ ε_r die komplexe Zahl

$$\varepsilon_r(\omega) := \varepsilon_r'(\omega) - i \cdot \varepsilon_r''(\omega).$$

Hierbei ist im Imaginärteil ganz absichtlich das Minuszeichen gewählt worden, damit in der nachfolgenden Gleichung das bequemere Pluszeichen steht: Wir schreiben die Stromdichte von oben komplett aus und erhalten

$$j(\omega) = \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon_r''(\omega) \cdot E + i \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon_r'(\omega) \cdot E.$$

Damit können wir auch für ein beliebiges Material eine DK definieren! Wir nennen das dann aber nicht mehr Dielektrizitätskonstante, sondern **dielektrische Funktion**. Der „Leiteranteil“ (für den Stromanteil mit 0° Phasenverschiebung zuständig) landet im (negativen) Imaginärteil der dielektrische Funktion eines Materials, der Realteil ist dann die herkömmliche DK.

Die dielektrische Funktion hat eine enorme Aussagekraft: **In der (komplexen) dielektrischen Funktion eines Materials stecken alle elektrischen und optischen Eigenschaften dieses Materials!** Damit gehört sie ganz klar zu den Grundlagen der Materialwissenschaft.

Zuletzt interessieren wir uns noch kurz für die *dielektrischen Verluste*: Wenn man Strom und Spannung multipliziert, bekommt man bekanntlich die im „Verbraucher“ umgesetzte Leistung (hier als L notiert) in Watt. Multipliziert man Stromdichte und Feldstärke, so erhält man die Leistungsdichte (in W/cm^3). Wenn (wie es hier der Fall ist) Stromdichte und Feldstärke oszillieren, muß man auf die Phasenbeziehung der beiden achten: Feldstärke mal ohne Phasenverschiebung fließender Strom = L_W = Wirkleistung (wird meist in Wärme umgewandelt), Feldstärke mal mit 90° Phasenverschiebung fließender Strom = L_B = Blindleistung (macht weiter nichts). Oben haben wir die Ausdrücke für beide Stromdichtekomponenten; multipliziert mit $E(\omega) = E_0 \exp(i\omega t)$ erhält man die folgenden Leistungsdichten (hier unterschiedslos ebenfalls mit L bezeichnet):

$$\text{Wirkleistung: } L_W = \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon_r'' \cdot E^2$$

$$\text{Blindleistung: } L_B = \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \varepsilon_r' \cdot E^2$$

Das paßt insofern, als daß mit ϵ_r' die klassische DK gemeint ist, die im Kondensator ja außer Blindleistung nichts macht. Mit ϵ_r'' haben wir den zusätzlich vorhandenen ohmschen Widerstand erfaßt (Details dazu später und in einer Übungsaufgabe), und der wird ja bei Stromfluß heiß, weil Wirkleistung deponiert wird.

Wir werden aber noch folgendes lernen: Selbst absolut ideale Dielektrika haben in bestimmten Frequenzbereichen Imaginärteile ihrer DK! In diesen Frequenzbereichen sind auch ideale Dielektrika (mit verschwindender Gleichstromleitfähigkeit) verlustbehaftet – wir haben *unvermeidliche dielektrische Verluste*. In diesen Frequenzbereichen werden dann selbst ideale Dielektrika heiß, und darin steckt auch das Wirkprinzip des Küchengeräts „Mikrowelle“.

Unterkapitel 6.4: Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante

6.4.1 Der Grundversuch

Man setze das zu untersuchende Dielektrikum einem elektrischen Wechselfeld der relevanten Frequenz aus; je nach Frequenz kann es das Feld eines Plattenkondensators sein, oder es ist das (Strahlungs-)Feld einer elektromagnetischen Welle. In jedem Fall müssen dann das Feld vor und nach dem Durchgang durchs Dielektrikum miteinander verglichen werden. Dabei können zwei Effekte auftreten: Änderung der Amplitude und Änderung der Phase. Für nicht zu große Eingangsamplituden bekommt man typischerweise ein lineares Verhalten, so daß der Zusammenhang zwischen $E_{\text{in}} = E_0 \exp(i\omega t)$ und $E_{\text{out}} = E_1 \exp[i(\omega t + \phi)]$ als $E_{\text{out}} = H(\omega) \cdot E_{\text{in}}$ geschrieben werden kann, mit einer komplexen Übertragungsfunktion $H(\omega)$. Diese enthält die dielektrische Funktion; ein Beispiel dazu ist der obige Zusammenhang zwischen der Verschiebungsstromdichte und dem elektrischen Feld im Plattenkondensator.

Im Fall der Optik ergibt sich dabei folgende Erweiterung des Brechungsindex' n zu einer komplexen Größe n^* : Aus $n^2 = \epsilon$ wird $(n^*)^2 = \epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) - i \cdot \epsilon_r''(\omega)$, und das führt zu $n^* = n + i \cdot \kappa$, mit dem Realteil n , der der klassischen Brechzahl entspricht, und dem Imaginärteil κ (Extinktionskoeffizient), der ein Maß für die Absorption darstellt; im Unterkapitel 6.5 folgt etwas mehr dazu. Die Formeln, die den Zusammenhang von n und κ mit ϵ_r' und ϵ_r'' angeben, stehen im Hyperskript. Man muß sie nicht auswendig können; es genügt zu wissen, daß sie im Fall von $\epsilon_r'' = 0$ zu $\kappa = 0$ führen (und umgekehrt), so daß dann $n^2 = \epsilon_r'$ gilt (wie gehabt).

Es bleibt nur noch, die dielektrische Funktion eines Materials zu berechnen (d. h. ihre Frequenzabhängigkeit). Dafür gibt nur zwei grundlegende Mechanismen, die wir betrachten müssen: Resonanz und Relaxation. Die zugehörige Mathematik führt zu länglichen Formeln; wir reduzieren sie auf das notwendige Minimum. Wer die Details wissen will, wird in der Physik-Vorlesung bzw. entsprechenden Lehrbüchern fündig.

6.4.2 Der Frequenzgang der (komplexen) Dielektrizitätskonstante für Resonanz

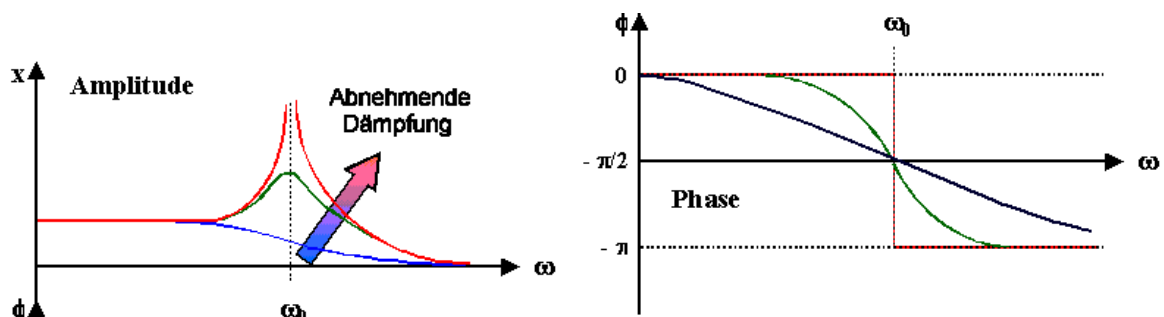
Zwei der Polarisationsmechanismen sind dadurch gekennzeichnet, daß das äußere elektrische Feld an den vorhandenen geladenen Massen angriffeit, während eine „effektive Federkraft“, d. h. eine Kraft proportional zur Auslenkung, sie zurückzieht. Bei der Atompolarisation stammt die Federkraft aus der Coulombanziehung zwischen der verschobenen Elektronenwolke und dem Atomkern (weshalb die Atompolarisation auch Elektronenpolarisation heißt), bei der ionischen Polarisation kommt sie durch die interatomaren Bindungskräfte zustande. Falls das elektrische Feld (und damit die externe Kraft) mit der Kreisfrequenz ω oszilliert, werden die ladungsbehafteten Massen periodisch getrieben.

Im allgemeinen Fall einer erzwungenen Schwingung ist noch eine Dämpfung durch Reibung zu berücksichtigen; anderenfalls würde die Energie des Systems unbegrenzt zunehmen, was zu dessen Zerstörung führt. Wodurch die Reibung bzw. Dämpfung mikroskopisch im Fall der

Polarisationsmechanismen herkommt, klären wir später; hier betrachten wir nur die generelle mathematische Behandlung dieser Situation. Zu lösen ist folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k_R \cdot m \cdot \frac{dx}{dt} + k_F \cdot x = q \cdot E_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Darin ist k_R die Reibungskonstante und k_F die Federkonstante. Wie diese Gleichung zu lösen ist, sollte bekannt sein; Details sind in der einschlägigen Literatur zu finden. Für uns ist jetzt lediglich das Verständnis dessen wichtig, was diese Lösungen bedeuten. Dabei gibt es zwei unterschiedliche Herangehensweisen, die Lösung anzugeben: einerseits als Kombination aus Amplitude und Phase, andererseits als Kombination aus Real- und Imaginärteil. Amplitude und Phase sind dabei viel anschaulicher, denn sie geben direkt an, was man bei der getriebenen schwingenden Masse sieht:



Im ungedämpften Fall ($k_R = 0 \text{ s}^{-1}$) steigt die Amplitude bei der Resonanzfrequenz ω_0' über alle Grenzen; dabei springt die Phase von 0° auf 180° . Mit Dämpfung ist die Resonanzamplitude endlich; sie wird mit zunehmender Dämpfung kleiner. Außerdem macht die Phase keinen Sprung, sondern ändert sich im Resonanzbereich stetig – so wie im Bild gezeigt. Für die Resonanzfrequenz gilt:

Ohne Dämpfung $\omega_0' = \left(\frac{k_F}{m} \right)^{1/2}$	Mit Dämpfung $\omega_0 = \left(\frac{k_F}{m} - \frac{k_R^2}{4} \right)^{1/2}$
--	--

Die Dämpfung sorgt auch dafür, daß die Amplitude einer Schwingung nach Wegnehmen der treibenden Kraft exponentiell abklingt: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \exp(-k_R/2 \cdot t)$. Der Kehrwert der Dämpfungskonstante k_R gibt an, nach welcher Zeit die Schwingung in etwa abgeklungen ist. Damit sagt uns ω/k_R im wesentlichen, wie oft das System nach dem Abschalten noch hin und her zappelt.

Als Kombination aus Real- und Imaginärteil angegeben, lautet die Lösung der Schwingungsgleichung [die man dann mit dem komplexen Ausdruck $\exp(i\omega t)$ als Anregung schreibt]:

Ansatz

$$x^*(\omega, t) = x^*(\omega) \cdot \exp(i\omega t)$$

Allgemeine Lösung

$$x(\omega) = \frac{q \cdot E_0}{m} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \omega^2} - i \cdot \frac{k_R \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \omega^2} \right)$$

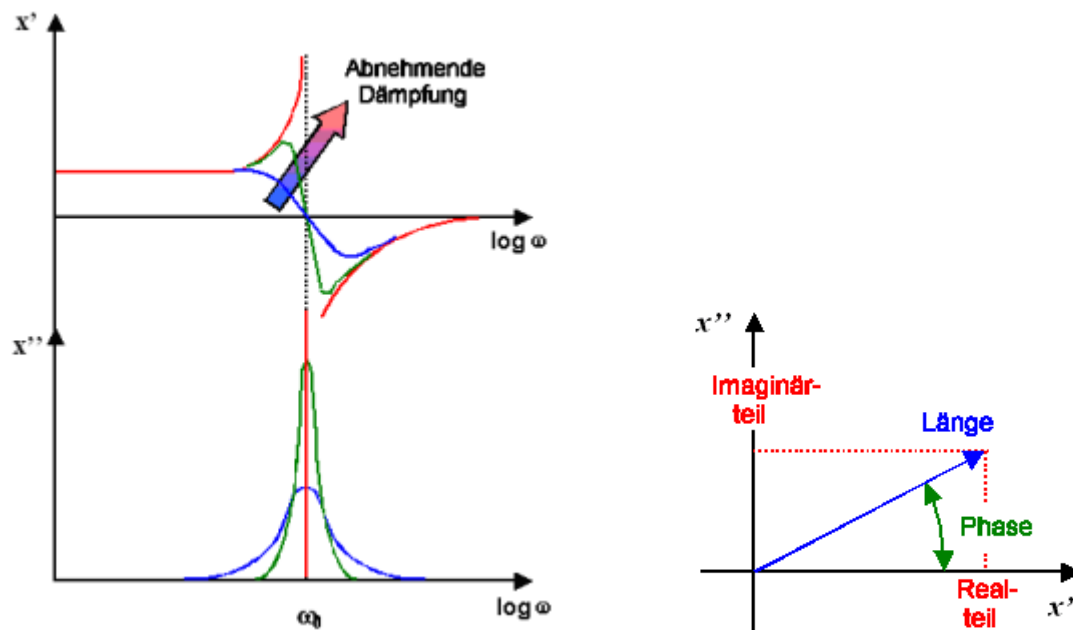
Realteil der allg. Lösung

$$x'(\omega) = \frac{q \cdot E_0}{m} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \omega^2} \right)$$

Imaginärteil der allg. Lösung

$$x''(\omega) = \frac{q \cdot E_0}{m} \left(\frac{k_R \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \omega^2} \right)$$

Die Graphik dazu sieht so aus:



Den Zusammenhang zwischen der direkten Darstellung und der komplexen Darstellung kann man am besten in einem Zeigerdiagramm sehen; dies ist rechts daneben gezeigt.

Haben wir die Amplituden, haben wir auch die Dipolmomente. Haben wir die Dipolmomente, bekommen wir die Polarisisation, daraus die Suszeptibilität und schließlich und endlich die dielektrische Funktion. Für *jeden* resonanten Mechanismus lautet sie wie folgt (gleich für Realteil und Imaginärteil getrennt geschrieben):

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{N \cdot q^2}{m} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \cdot \omega^2} \right)$$

$$\epsilon'' = \frac{N \cdot q^2}{m} \left(\frac{k_R \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k_R^2 \cdot \omega^2} \right)$$

Für konkrete Rechnungen oder auch einfache Abschätzungen brauchen wir Zahlenwerte für die Federkonstante (sie steckt in der Resonanzfrequenz ω_0) und Zahlenwerte für die Dämpfungskonstante k_R , außerdem ein Gefühl dafür, was passiert, wenn da nicht nur ein Atom ist, sondern ein großer, irgendwie durch Federn gekoppelter Haufen. Wie man auf die Federkon-

stante der Rückstellkraft kommen kann, haben wir schon besprochen. Die Dämpfung hängt direkt mit dem „Atomhaufen“ zusammen: Schwingt ein Atom, treibt es seine Nachbarn ebenfalls zu Schwingungen an. Dabei verliert es Energie, und das wirkt wie eine sehr effektive Dämpfung. Daher wird die dielektrische Funktion bei Resonanzphänomenen eher so aussehen wie die blaue oder grüne Kurve in der obigen Prinzipdarstellung. Oberhalb der Resonanzfrequenz geht der Realteil auf 1, d. h. das dielektrische Verhalten verschwindet. Nur um die Resonanzfrequenz herum ist der Imaginärteil deutlich von Null verschieden – um so mehr, je kleiner die Dämpfung ist; die Breite des Peaks im Imaginärteil ist ein Maß für die Dämpfung.

Die Resonanzfrequenz bei der ionischen Polarisation kennen wir gut: Es sind die berühmten ca. 10^{13} Hz, die wir generell aus dem Bindungspotential erhalten. Die Resonanzfrequenz bei der Atompolarisation haben andere für uns ausgerechnet. Beim Wasserstoffatom (größtmöglicher Effekt) liegt sie bei $5 \cdot 10^{16}$ Hz, also im Ultravioletten. Damit ist klar: Es gibt keine auf Linsen beruhende Optik mehr im UV und darüber – alle Brechungsindizes sind $n = 1$. (Trotzdem gibt es „Röntgenoptik“, aber die funktioniert etwas anders als klassische Optik!)

(Fortsetzung folgt.)