Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Übung 9: Dielektrika II, Magnetismus

Aufgabe 21: Wirk- und Blindleistung eines Kondensators bzw. Dielektrikums

Bei einem idealen ohmschen Widerstand R fließt jeglicher Strom ohne Phasenverschiebung: $I = U/R$. Mit diesem Stromfluß ist eine reine Wirkleistung von $P = UI = U^2/R$ verbunden. Über einen idealen Kondensator C fließt kein Gleich-, sondern nur Wechselstrom, und zwar mit einer Phasenverschiebung von 90° bzw. $\pi/2$; dabei läuft der Strom der Spannung voraus: $U = C^{-1} \int I \, \mathrm{d}t$ bzw. $I = C \, \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$. Mit diesem Stromfluß ist reine Blindleistung verbunden. In einer Schaltung, die sowohl Widerstände als auch Kondensatoren enthält, kann jeglicher phasenverschoben fließende Strom durch einen *komplexen Widerstand* erfaßt werden; dieser komplexe Widerstand ist die Impedanz Z. Der Realteil von Z ist der ideale ohmsche Widerstand R und führt zur Wirkleistung, der Imaginärteil von Z führt zur Blindleistung.

a) Geben Sie den Ausdruck für die Impedanz Z_C des idealen Kondensators an.

Bei dieser „elektrotechnischen“ Betrachtungsweise anhand der Impedanz gilt der ideale ohmsche Widerstand als „Normalfall“, denn er dient als Referenz für die Unterscheidung nach Real- und Imaginärteil: Alles, was nicht dem „Normalfall“ entspricht, landet im Imaginärteil.

Was aber als „Normalfall“ angesehen wird, hängt von der jeweiligen Betrachtungsweise bzw. Fragestellung ab: Ein ideales Dielektrikum, das einem elektrischen Wechselfeld ausgesetzt ist, zeigt für niedrige Frequenzen eine Polarisation P, die dem Feld E ohne Phasenverschiebung folgt: $P = \varepsilon_0 \chi E$ (mit der dielektrischen Suszeptibilität χ, die von der Kreisfrequenz ω abhängt). Dies ist der Normalfall bei der „materialwissenschaftlichen“ Betrachtungsweise eines Dielektrikums. Weil dabei der Fall eines konstanten Feldes mit erfaßt wird, dient dies als Referenz für die Unterscheidung nach Real- und Imaginärteil von $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$.

b) Geben Sie den Einfluß des Dielektrikums, mit dem der „Zwischenraum“ eines Kondensators gefüllt ist, auf dessen Kapazität C folgendermaßen quantitativ an: Wie lautet die Formel für den Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Kapazität C und der hypothetischen Kapazität C_0, die der Kondensator ohne das Dielektrikum hätte? [Hinweis: Berücksichtigen Sie, daß $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r(\omega)$ gilt.]

Wenn die beiden hier dargelegten Betrachtungsweisen (die „elektrotechnische“ und die „materialwissenschaftliche“) in Konflikt geraten, kann dies zu gewissen Verständnisschwierigkeiten bezüglich der Bedeutung von Real- und Imaginärteil führen. Ein solcher Konflikt tritt meist dann auf, wenn es darum geht, das frequenzabhängige Verhalten eines Kondensators aus der Perspektive des Dielektrikums zu beschreiben, d. h. sobald der ideale *Isolator* die Referenz darstellt – und nicht, wie eingangs diskutiert, der ideal ohmsche *Leiter*. Bei den folgenden Fragen geht es darum, sich die unterschiedlichen Perspektiven bewußt zu machen – und sich darüber im Klaren zu sein, woran man sich im Zweifelsfall halten kann. So ist z.B. die Betrachtung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung eine „sichere elektrotechnische Bank“.

c) Ersetzen Sie in der Impedanz Z_C [Antwort zu a)] die allgemeine Kapazität C durch den in b) erhaltenen Zusammenhang, und begründen Sie anhand der resultierenden Formel für Z_C (d. h., auf elektrotechnische Weise), welche der beiden Komponenten von $\chi(\omega)$, der Real- oder der Imaginärteil, beim idealen Kondensator zur Blindleistung führt. (Selbst wenn Sie bereits „anschaulich“ verstanden haben, was die richtige Antwort ist, geben Sie bitte eine Begründung allein anhand der Formel an.)

Eine perfekte Isolierung gibt es in der Praxis nicht; zusätzlich zur Kapazität müssen ggfs. gewisse ohmsche Anteile berücksichtigt werden. Weil sich parallele Stromflüsse addieren, ist es am einfachsten, den resultierenden Leitwert (Kehrwert der Impedanz) anzugeben.

d) Geben Sie die Formel für den Kehrwert der komplexen Impedanz Z_{par} für eine Parallelschaltung eines idealen Kondensators und eines idealen Widerstandes an.

Bei jedem Dielektrikum gibt es einen Frequenzbereich, in dem der Imaginärteil von $\chi(\omega)$ nicht null ist (siehe Vorlesung, Abschnitt 6.4.4). Betrachten Sie jetzt die allgemeine Form $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - \mathrm{i}\chi''(\omega)$, d. h. mit einem expliziten Minuszeichen vor dem Imaginärteil.

e) Verwenden Sie in der Formel aus d) die allgemeine Form von $\chi(\omega)$, und begründen Sie wieder auf elektrotechnische Weise (d. h. durch eine Betrachtung der Phasenverschiebung), zu welcher Art Leistung der Imaginärteil von $\chi(\omega)$ führt – Blind- oder Wirkleistung? (Hinweis: Sortieren Sie die Formel für $\frac{1}{Z_{\text{par}}}$ nach Real- und Imaginärteil.)

Der Leitwert (Kehrwert der Impedanz) bezieht sich auf die Stromstärke, die Leitfähigkeit (= spezif. Leitwert) bezieht sich auf die Stromdichte. In der Vorlesung wurde allgemein für ein Dielektrikum gezeigt, daß bei Vorliegen eines elektrischen Wechselfeldes der Form $E(\omega) = E_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$ die verallgemeinerte Stromdichte $j(\omega) = \partial D/\partial t$ einen Real- und einen Imaginärteil besitzt.

f) Vergleichen Sie die Formel für $j(\omega)$ aus der Vorlesung (Abschnitt 6.3.3) mit dem rein ohmschen Fall, ausgedrückt als $j = \sigma E$ (mit $\sigma = \frac{1}{\rho}$: spezif. Leitwert = $\frac{1}{\text{spezif. Widerstand}}$), und geben Sie die Beziehung zwischen dem spezifischen Leitwert und dem entsprechenden Anteil in $\varepsilon_r(\omega)$ an (vgl. Vorlesung). Vergewissern Sie sich, daß die Maßeinheiten zusammenpassen.

Betrachten Sie das folgende Schaltbild aus Abschnitt 6.4.4 der Vorlesung („Gesamtschau“), das den bereits im Abschnitt 6.3.3 behandelten Fall eines realen Dielektrikums wieder aufgreift:

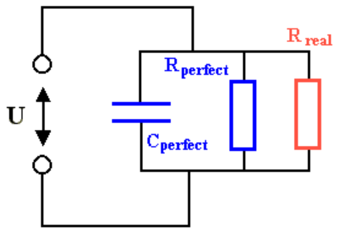

Abbildung 1: Ersatzschaltbild für ein reales Dielektrikum. Die in Blau dargestellten Elemente beziehen sich auf den Fall des idealen Dielektrikums (engl. „perfect“), der in Rot dargestellte Widerstand repräsentiert die aus der nicht perfekten Isolierung resultierenden ohmschen Anteile (engl. „real“).

Für ein reales Dielektrikum gibt die Suszeptibilität $\chi(\omega)$ weiterhin ausschließlich die Polarisierbarkeit und damit das ideale Verhalten an, denn die zusätzliche ohmsche Gleichstromleitfähigkeit ändert nichts an der Polarisierbarkeit; das gesamte reale Verhalten wird erst durch $\varepsilon_r(\omega)$ erfaßt.

g) Wie kann der zusätzliche reale ohmsche Anteil in der dielektrischen Funktion $\varepsilon_r(\omega)$ berücksichtigt werden, rein prinzipiell gesehen?

h) Wenden Sie die in f) erhaltene Beziehung auf die folgenden zwei Situationen an: (i) Welche Formel für σ ergibt sich im Fall eines idealen Dielektrikums? (ii) Welche Formel für $\varepsilon_r(\omega)$ ergibt sich im Fall eines realen Dielektrikums? [Hinweis zu (ii): Drücken Sie σ als Gesamt-Leitfähigkeit entsprechend Abb. 1 aus und verwenden Sie die Formel für den Fall (i).]

i) Geben Sie (analog zur Vorlesung) die Ausdrücke für Wirk- und Blindleistungsdichte für das reale Dielektrikum anhand der allgemeinen Formel $L(\omega) = j(\omega)E$ an, wobei Sie darin nicht Real- und Imaginärteil von $\varepsilon_r(\omega)$, sondern von $\chi(\omega)$ verwenden.

Aufgabe 22: Relaxation als Modell für die Frequenzabhängigkeit der Polarisation

Betrachten Sie zunächst ganz allgemein ein Dielektrikum als eine in seinem gesamten Volumen polarisierbare Substanz (beliebiger Polarisationsmechanismus).

a) Geben Sie die Formel für den allgemeinen Zusammenhang zwischen makroskopischer Polarisation $\vec{P}$ eines Dielektrikums und mikroskopischem Dipolmoment $\vec{\mu}$ an. Was bedeutet diese Formel? Was sagt sie für den Fall, daß $\vec{P} \neq \vec{0}$ ist, darüber aus, was dann im Dielektrikum vorliegt?

Als Modell für elementare Bestandteile einer polarisierbaren Substanz (d. h. eines Dielektrikums) betrachten wir nun Dipole, deren zeitliches Verhalten (und damit auch ihr Frequenzverhalten) nicht durch Resonanz, sondern durch einen Relaxationsprozeß zustandekommt.

b) Welche fundamentale physikalische Eigenschaft ist in Systemen, die Relaxationsverhalten zeigen, *nicht* vorhanden (im Gegensatz zu Systemen mit Resonanz)?

c) Die Impulsantwort eines „Relaxationssystems" ist durch $h(t) = \frac{1}{\tau}\,\Theta(t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ gegeben; $\Theta(t)$ ist die Sprungfunktion, τ die Relaxationszeit. Ganz allgemein liefert die Fouriertransfomierte der Impulsantwort, $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t$, das Frequenzverhalten eines Systems; $H(\omega)$ heißt Übertragungsfunktion. Berechnen Sie diese Übertragungsfunktion für ein „Relaxationssystem".

d) Zeichnen Sie die Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion für den Fall eines Relaxationsprozesses, d. h. den Real- und den Imaginärteil von $H(\omega)$ [siehe Aufgabenteil c)]. Betrachten Sie das Maximum des Imaginärteils von $H(\omega)$: Wie groß ist dort die Phasenverschiebung des Imaginärteils von $H(\omega)$ relativ zum Realteil?

Aufgabe 23: Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Ein paramagnetisches Material besitzt elementare magnetische Dipole, die sich frei im Raum drehen können.

a) Warum ist das Magnetisierungsverhalten eines paramagnetischen Materials dem Polarisationsverhalten von Wasser vollkommen analog? Das zugehörige äußere (magnetische bzw. elektrische) Feld sei jeweils zeitlich konstant und räumlich homogen.

b) Erläutern Sie *ganz allgemein* und *sehr detailliert* den Polarisationsmechanismus der Orientierungspolarisation, indem Sie (unabhängig von der Art des äußeren Feldes) lediglich von den Dipolen in der Materie sprechen.

   Beginnen Sie mit dem Fall, daß noch kein äußeres Feld angelegt ist: Wie groß ist dann die makroskopische Polarisation, und warum ist das so? Was ändert sich an all dem, sobald ein äußeres Feld angelegt wird? Wonach richtet sich die Stärke der resultierenden Polarisation, und wie skaliert sie mit der Feldstärke? Was passiert nach dem Abschalten des Feldes?

Unterhalb seiner Curie-Temperatur von 1041 K ist Eisen ferromagnetisch, oberhalb paramagnetisch. Betrachten Sie bei den nachfolgenden Fragen ferromagnetisches Eisen.

c) Das molare Volumen von Eisen beträgt $V_\mathrm{m} = 7{,}1\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{mol}}$. Berechnen Sie die Atomdichte n_Fe.

d) Berechnen Sie die maximal erreichbare Magnetisierung M_{max} von Eisen unter der Annahme, daß jedes Fe-Atom des Kristalls m_{Bohr} beiträgt.

e) Wie groß ist die magnetische Flußdichte B, die von der Sättigungsmagnetisierung von Fe hervorgerufen wird? Ist das ein „eher starkes“ oder „eher schwaches“ Magnetfeld? (Hinweis: Als wie stark würden Sie das Erdmagnetfeld einschätzen? Und wie stark erscheint Ihnen das Magnetfeld, das bei einem Kernspintomographen [kurz „MRT“] verwendet wird?)

f) Kann ein ferromagnetisches Material auch diamagnetisches Verhalten haben bzw. zeigen?

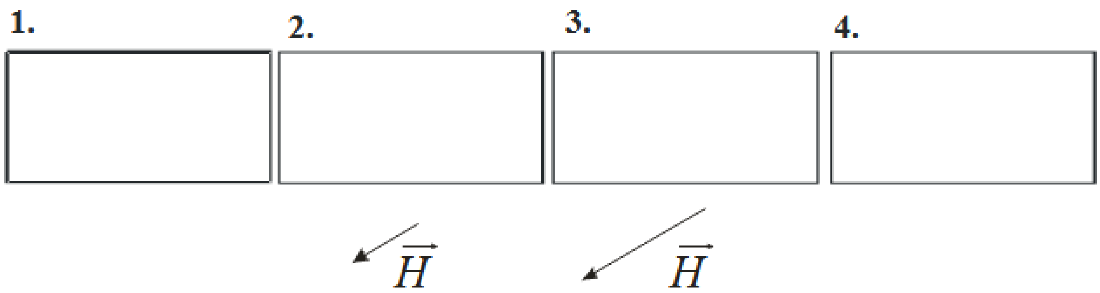

Abbildung 2: Ein rechteckiges Stück Eisen, dessen magnetisch „leichte Richtungen“ entlang seiner Längskanten verlaufen, wird verschiedenen magnetischen Feldern ausgesetzt (siehe Text).

g) Zeichnen Sie die interne Domänenstruktur (= die Weiss-Bezirke) des Eisenstücks in Abb. 2 ein, und zwar wie folgt bei den einzelnen Teilen der Abbildung:

1.) vor jeglicher Magnetisierung;

2.) für ein kleines externes magnetisches Feld $|\vec{H}| \ll |\vec{H}_{\text{Sat}}|$ (Sättigungsfeldstärke);

3.) für ein großes externes magnetisches Feld $|\vec{H}| \gg |\vec{H}_{\text{Sat}}|$;

4.) nachdem das magnetische Feld aus 3.) wieder ausgeschaltet wurde.

h) Begründen Sie die bei g) in 1.) eingezeichnete Konfiguration. (Hinweis: Zwei voneinander unabhängige Aspekte sind relevant.)

i) Zeichnen Sie die komplette Magnetisierungskurve $M(H)$, und markieren Sie auf dieser Kurve die Stellen, die den vier gezeichneten Domänenstrukturen von Aufgabenteil g) entsprechen, indem Sie sie mit den Nummern 1 bis 4 beschriften.

j) Beschriften Sie die Achsenschnittpunkte der Magnetisierungskurve außerhalb des Ursprungs mit geeigneten Symbolen und geben Sie die zugehörigen gebräuchlichen Bezeichnungen an.

k) Bis zu welcher maximalen Frequenz (typischerweise / in Ausnahmefällen) eines von außen angelegten magnet. Wechselfeldes können sich Wände magnetischer Domänen verschieben? Welche Rolle spielen Kristalldefekte bei dieser Frequenzlimitierung?

l) Wie kann nach erfolgter Magnetisierung eine Domänenstruktur wie im Ausgangszustand erreicht werden (Stichwort: Entmagnetisierung)?

m) * Woran kann man anhand der Hysteresekurve den Unterschied zwischen einem Weich- und einem Hartmagneten erkennen, wenn keine Maßzahlen an den Achsen angegeben sind?

n) Wofür werden Weich- und Hartmagnete jeweils vorzugsweise technisch verwendet, und auf welcher ihrer magnetischen „Besonderheiten“ beruht die jeweilige Verwendung? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.