

## Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

### Lösungen zu Übung 8: Dielektrika I

#### Aufgabe 19: Skalierung von Mikroprozessoren, RC-Zeitkonstante, Mooresches „Gesetz“

a), b)  $U_{\text{out}}(t)$  beschreibt die Spannung am Kondensator. Wenn die externe Spannung  $U_{\text{in}}$  von 0 V auf 1,5 V steigt, wird der Kondensator geladen. Die charakteristische Ladekurve (siehe die folgende Abbildung) lässt sich beschreiben durch:

$$U_{\text{out}}(t) = 1,5 \text{ V} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

mit der charakteristischen Zeitkonstante  $\tau = RC$ . Wenn die Spannung wieder auf 0 V gestellt wird, wird der Kondensator entladen:

$$U_{\text{out}}(t) = 1,5 \text{ V} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

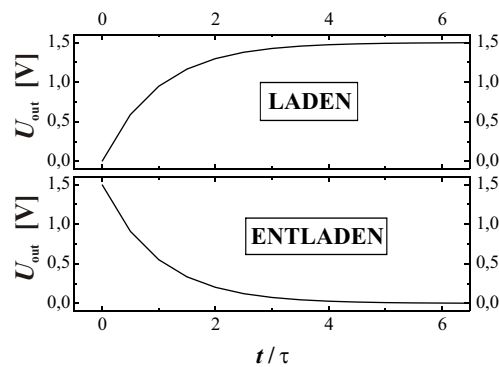


Abbildung 1: Lade- und Entladekurve eines RC-Gliedes (Zeit relativ zu  $\tau = RC$ )

- c) Das reale Bauteil besteht nicht aus einem idealen Widerstand und einem idealen Kondensator, die in Reihe geschaltet sind; vielmehr liegen der reale Widerstand und die reale Kapazität über der Länge der Leiterbahn verteilt vor. Die Beziehung  $\tau = RC$  gilt dagegen nur für ideale, diskrete Bauteile.
- d) Mit der gegebenen Länge  $L$ , der Breite  $W$ , der Höhe  $H$  und dem spezifischen Widerstand  $\rho$  des Leitungsmaterials lässt sich der Widerstand der Leitung formelmäßig angeben:

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho L}{HW}.$$

e) Die Kapazität  $C_S$  zwischen Leitung und Substrat ist näherungsweise gegeben durch:

$$C_S = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{LW}{x_{\text{ox}}}.$$

Die Kapazität zwischen zwei Leitungen ist näherungsweise gegeben durch:

$$C_I = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{HL}{L_S}.$$

Die Gesamtkapazität  $C$  beider Leitungen ergibt sich aus der Addition beider Kapazitäten (weil  $C_S$  und  $C_I$  parallel geschaltet sind, da sowohl das Substrat als auch eine der Leitungen auf Masse liegen):

$$C = C_S + C_I = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{LW}{x_{\text{ox}}} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{HL}{L_S} = \varepsilon_0 \varepsilon_r L \left( \frac{W}{x_{\text{ox}}} + \frac{H}{L_S} \right).$$

- f) Die für den Lade-/Entladevorgang charakteristische Zeitkonstante  $\tau$  ergibt sich aus dem Produkt von  $R$  und  $C$ , welche in Aufgabenteil d) und e) ermittelt wurden:

$$\begin{aligned} \tau &= 0,89 RC = 0,89 R(C_S + C_I) \\ &= 0,89 \frac{\rho L}{HW} \varepsilon_0 \varepsilon_r L \left( \frac{W}{x_{\text{ox}}} + \frac{H}{L_S} \right) = 0,89 \frac{\rho L^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{HW} \left( \frac{W}{x_{\text{ox}}} + \frac{H}{L_S} \right). \end{aligned}$$

- g) Für eine minimale Strukturgröße von  $F_{\text{min}} = L_S = W = H = x_{\text{ox}} = 250 \text{ nm}$  vereinfacht sich die Gleichung aus f) für  $\tau$  zu:

$$\begin{aligned} \tau &= 0,89 \frac{\rho L^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{HW} \left( \frac{W}{x_{\text{ox}}} + \frac{H}{L_S} \right) = 0,89 \frac{\rho L^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{F_{\text{min}} F_{\text{min}}} \left( \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{min}}} + \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{min}}} \right) = 0,89 \frac{2\rho L^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{F_{\text{min}}^2} \\ &= 0,89 \frac{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m} \cdot 300 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 3,5}{(2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m})^2} = 9,8 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 9,8 \text{ ns}. \end{aligned}$$

Eine Frequenz von  $f = 200 \text{ MHz} = 0,2 \text{ GHz}$  hat eine Periodendauer  $T = f^{-1} = 5 \text{ ns}$ . Die Zeitkonstante  $\tau$  der Leitung liegt in der gleichen Größenordnung wie dieser Wert, somit ist sie problematisch. Es ist üblich, den Wert  $\tau^{-1}$  als obere Grenzfrequenz anzusehen, und das sind hier  $1/(9,8 \text{ ns}) = 102 \text{ MHz}$ ; höhere Frequenzen als diese werden stark gedämpft.

Das Problem konnte in der Praxis jedoch mit einem Trick umgangen werden: Die dünnen und langen Leitungen sind nach wenigen  $\mu\text{m}$  nach oben mit dickeren Leitungen verbunden. Über der eigentlichen Verbindungsebene liegen heutzutage einige Schichten, die nur zur besseren Verbindung der Leitungen genutzt werden. Dadurch werden die Leitungen im Mittel dicker und effektiv verkürzt, so daß sich die Zeitkonstante  $\tau$  stark verringert.

- h) Als Dielektrikum wurde zu dieser Zeit in aller Regel  $\text{SiO}_2$  benutzt [vgl. Abb. 1(c) des Aufgabenblatts].  
 i) Mit einer minimalen Strukturgröße  $F_{\text{min}} = 80 \text{ nm}$  und einer maximalen Leitungslänge  $L = 6,4 \mu\text{m}$  ergibt sich eine neue Zeitkonstante  $\tau_{\text{neu}}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\text{neu}} &= 0,89 \frac{2\rho L^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{F_{\text{min}}^2} = 0,89 \frac{2 \cdot 3,3 \mu\Omega\text{cm} \cdot 40,96 \mu\text{m}^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 3,5}{(80 \text{ nm})^2} \\ &= 0,89 \frac{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m} \cdot 40,96 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 3,5}{(8 \cdot 10^{-8} \text{ m})^2} = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ s} = 12 \text{ fs}. \end{aligned}$$

Eine Frequenz von  $f_{\text{neu}} = 4 \text{ GHz}$  hat eine Periodendauer  $T_{\text{neu}} = f_{\text{neu}}^{-1} = 0,25 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 250 \text{ ps}$ . Daher stellt die Zeitkonstante  $\tau_{\text{neu}}$  kein Problem dar.

- j) Das Verhältnis der Zeitkonstante  $\tau_{\text{neu}}$  und  $\tau_{\text{Cu, low-k}}$  ist

$$\frac{\tau_{\text{Cu, low-k}}}{\tau_{\text{neu}}} = \frac{0,89 \cdot \rho_{\text{Cu}} \cdot L^2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{r, \text{low-k}} \cdot F_{\text{min}}^2}{0,89 \cdot \rho \cdot L^2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot F_{\text{min}}^2} = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot \varepsilon_{r, \text{low-k}}}{\rho \cdot \varepsilon_r} = \frac{2 \mu\Omega\text{cm} \cdot 2,8}{3,3 \mu\Omega\text{cm} \cdot 3,5} \approx 0,5.$$

Dieser Wert entspricht etwa dem Fortschritt von 2 ITRS-Generationen.

- k) Die kleinste derzeit in der Massenproduktion verwendete tatsächliche Strukturgröße läßt sich nicht so leicht ermitteln: Die modernsten Fertigungstechnologien *heißen* lediglich „5 nm“, „4 nm“ usw., jedoch sind die tatsächlichen Strukturen deutlich größer.<sup>1</sup> Hinzu kommt, daß die Hersteller unterschiedliche Fertigungstechniken verwenden und sich ihre Transistoren zudem in der 3D-Geometrie unterscheiden (FinFET, GAA, . . .), so daß der „X nm“-Prozeß des einen Herstellers dem „Y nm“-Prozeß eines anderen Herstellers entsprechen kann.<sup>2</sup> Die Größen tatsächlicher Strukturen der derzeit kleinsten Prozeßtechnologie, der 3-nm-Technologie, sind 24 nm für den Abstand von Metallisierung zu Metallisierung [= Summe von  $L_S$  und  $W$  entsprechend Abb. 1(c) auf dem Aufgabenblatt] und 48 nm für den (analog zu verstehenden) Abstand zwischen Gate-Kontakten direkt benachbarter Transistoren.<sup>3</sup> Wesentlich kleinere Strukturen lassen sich derzeit gar nicht herstellen, weil die Strukturierung auf Lithographie mit extremem Ultraviolett beruht (EUV: Licht mit einer Wellenlänge von 13,5 nm).<sup>4</sup>
- l) Das Mooresche „Gesetz“ konnte in der Vergangenheit nur dadurch eingehalten werden, daß die Strukturgrößen immer kleiner wurden. Würde diese Skalierung unbesehen fortgesetzt werden, käme man zunächst in die Größenordnung weniger Atome, in der bereits massiv die quantenmechanischen Effekte relevant sind; dies beeinflußt die Funktionsweise der Schaltungselemente (von evtl. Durchbrüchen wegen hoher Feldstärke ganz zu schweigen), so daß eine bloße Kleinerskalierung nicht möglich ist. Und rein rechnerisch käme man irgendwann in subatomare Größenordnungen – was natürlich nicht zu realisieren ist. Dies ist einer der Gründe, warum das Mooresche „Gesetz“, das sich in seiner ursprünglichen Fassung allein auf die *laterale* Dichte der Schaltungselemente in *nur einer* Ebene bezieht, an eine im Rahmen der klassischen Elektronik prinzipiell nicht zu überwindende Grenze stößt. Allerdings werden [wie schon unter g) erwähnt] bereits seit einigen Jahren die Schaltungselemente in einem IC nicht mehr in nur einer Ebene angeordnet (wie die Bauteile auf einer Platine), sondern es wird „in die dritten Dimension gegangen“, d. h. die Schaltungselemente werden in sehr vielen Ebenen übereinander hergestellt. Dies sorgt für eine gewisse Aufweichung des Mooreschen „Gesetzes“, da es bei einer 3D-Struktur viel mehr Möglichkeiten gibt, auf derselben Grundfläche eine immer größere Zahl von Schaltungselementen in einem einzelnen IC unterzubringen.

Es gibt aber noch ein weiteres Problem, das die Miniaturisierung prinzipiell einschränkt: die Wärmefreisetzung. Trotz der hohen Wärmeleitfähigkeit von Silizium ist es mit den konventionellen Kühlmethoden bei den miniaturisierten Schaltungselementen nicht möglich, die maximal zulässige Betriebstemperatur einzuhalten. Das ist auch der Grund dafür, daß seit dem Jahr 2004 die Prozessoren nicht mehr schneller wurden (die Taktfrequenz stagniert seitdem), denn die Wirkleistung ist proportional zur Frequenz (aus der Vorlesung:  $L_W = \varepsilon'' \cdot \omega \cdot E^2$ ). Statt dessen wurde begonnen, zur Erhöhung der Rechenkapazität mehrere Prozessorkerne in einem IC zu vereinen. (Zum Vergleich: Das menschliche Gehirn arbeitet hochgradig parallel – bei einer viel niedrigeren Taktfrequenz, was zu einer Leistungsaufnahme von nur rund 20 Watt führt.)

Der Übergang zu mehreren Kernen zeigt, wie das Mooresche „Gesetz“ im Laufe der Zeit umgedeutet wurde: Die Verdopplung in einem bestimmten Zeitraum bezieht sich heutzutage nicht mehr auf die bloße Anzahl der Schaltungselemente pro Fläche (d. h. ihre Dichte),

<sup>1</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Technologieknoten>, <https://www.eejournal.com/article/no-more-nanometers/>

<sup>2</sup> Beispiel siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/10\\_nm\\_process](https://en.wikipedia.org/wiki/10_nm_process)

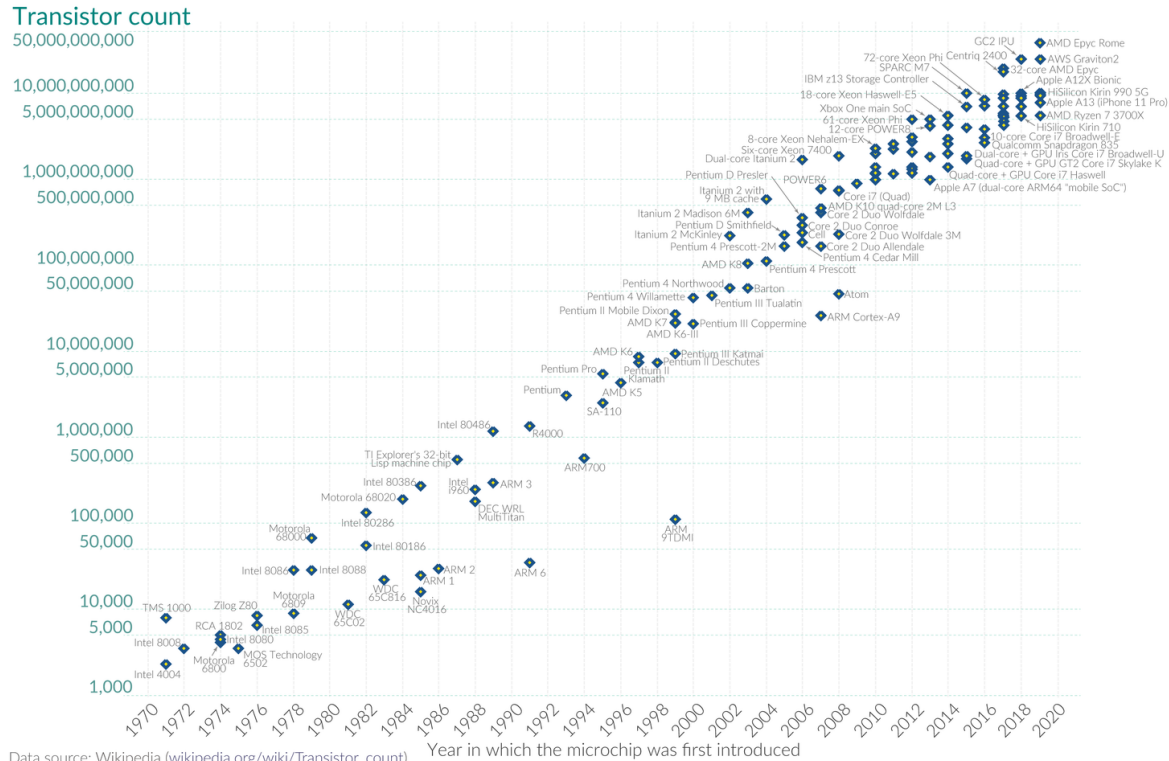
<sup>3</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/3\\_nm\\_process](https://en.wikipedia.org/wiki/3_nm_process)

<sup>4</sup> <https://spectrum.ieee.org/a-better-way-to-measure-progress-in-semiconductors>

Moore's Law: The number of transistors on microchips doubles every two years



Moore's law describes the empirical regularity that the number of transistors on integrated circuits doubles approximately every two years. This advancement is important for other aspects of technological progress in computing – such as processing speed or the price of computers.



Data source: Wikipedia (wikipedia.org/wiki/Transistor\_count) OurWorldinData.org – Research and data to make progress against the world's largest problems. Licensed under CC-BY by the authors Hannah Ritchie and Max Roser.

sondern es wird die Leistungsfähigkeit des gesamten ICs betrachtet. Außerdem zählt heutzutage für den Endkunden hauptsächlich die auf den Kaufpreis bezogene Leistungsfähigkeit, und dafür sind auch sekundäre Parameter relevant, wie z. B. der Energieverbrauch (d. h. die elektrische Leistungsaufnahme; diese kann durch eine geringere Betriebsspannung reduziert werden) oder einfach der Preis selbst (d. h. billiger ist bereits besser). Vor allem aber führt derzeit die Integration weiterer Funktionen (u. a. von bislang separaten Bauteilen) zu einer erheblichen Steigerung der Leistungsfähigkeit von ICs (was auch zu Einsparungen an anderer Stelle führt); darunter fallen z. B. Sensoren und Aktuatoren (samt Signalauswertung bzw. Ansteuerung), Analogschaltungen (auch zur gemischten analogen und digitalen Signalverarbeitung), für Hochspannung geeignete Komponenten, MEMS (micro-electromechanical systems), mikrofluidische Bauteile oder Baugruppen, Biochips, Lab-on-a-Chip, System-on-Chip (SoC) u. a. Für diese Entwicklung steht das Schlagwort „Functional diversification“; das erklärt auch die Einbeziehung des Begriffs „Systems“ in der neuen Roadmap (IRDS). Prominente Beispiele für 5-nm-SoC sind Apples M1-Chip<sup>5</sup> und der Qualcomm-Prozessor „Snapdragon 888+ 5G“.

Letzten Endes ist es also einfach so, daß sich die Firmen zum Teil davon verabschieden, sich strikt an die bisherige Skalierungsprozedur des Mooreschen „Gesetzes“ zu halten; das ist mit dem „Ende des Mooreschen Gesetzes“ gemeint. Es wird zwar noch ein paar Jahre lang eine effektive Verkleinerung der Strukturgrößen bzw. die Verwendung von mehr Stapelungsebenen geben (das läuft unter der Überschrift „more Moore“), aber vor allem geht die Weiterentwicklung in Richtung Diversifizierung (das läuft unter der Überschrift „more than Moore“). Und an dieser Stelle kommen Sie als zukünftige Ingenieure ins Spiel: Falls Sie spä-

<sup>5</sup> <https://www.spiegel.de/netzwelt/gadgets/apple-und-der-m1-chip-warum-der-neue-chip-den-pc-markt-umkrepeln-koennte-a-fcc570fe-509d-444d-a8a2-bd3d56f93e49>

ter bei einer in Deutschland ansässigen Firma arbeiten, werden Sie das Geld Ihrer Firma sehr wahrscheinlich durch die „Veredelung“ eines Produktes verdienen, so daß es für eine spezielle Anwendung bestens geeignet ist („more than Moore“). Eher unwahrscheinlich ist dagegen, daß Sie einen Beitrag zu einem Produkt liefern, das als Massenware gelten kann; deren Weiterentwicklung („more Moore“) und Produktion findet typischerweise in Billiglohnländern statt (Ausnahme: Entwicklung von Spezialmaschinen, mit denen die Massenprodukte gefertigt werden; Beispiele: ASML<sup>6</sup>, Trumpf<sup>7</sup>).

## Aufgabe 20: Atompolarisation

- a) Ohne äußeres Feld ist ein neutrales Atom unpolarisiert; bei der Atompolarisation liegt daher ohne äußeres elektrisches Feld keine Polarisation (makroskopische Netto-Dipolmomentendichte) im Material vor. Wenn ein externes elektrisches Feld auf ein neutrales Atom mit der Ordnungszahl  $Z$  wirkt, werden der  $Z$ -fach positiv geladene Atomkern und die negativ geladene Elektronenhülle ( $Z$  Elektronen) gegeneinander verschoben. Durch die räumliche Verschiebung der beiden Ladungsschwerpunkte gegeneinander entsteht eine innere Coulombkraft, die entgegen der Kraft wirkt, die das externe elektrische Feld auf die Ladungen ausübt. Sind beide Kräfte im Gleichgewicht, so befinden sich die Ladungsschwerpunkte im Gleichgewichtsabstand  $d_E$  (Index  $E$ : äußeres elektr. Feld); das Atom stellt dann einen induzierten Dipol mit  $q = Ze$  dar. Falls die Dipolmomente aller Atome in die gleiche Richtung zeigen, ergibt sich ein makroskopisches Netto-Dipolmoment und damit eine Polarisation des Materials. Dieser Polarisationsmechanismus nennt sich Atompolarisation; er wird auch elektronische Polarisation genannt.
- b) Das elektrische Feld übt eine Kraft  $F_1 = qE$  auf die Ladungen des Atoms aus. Dabei ist  $q = \pm Ze$  (positiv: Atomkern, negativ: Elektronenhülle). Die rücktreibende Kraft  $F_2$ , welche sich aus der räumlichen Trennung der Ladungsschwerpunkte des Atoms ergibt, läßt sich nicht unmittelbar mit dem Coulombschen Gesetz berechnen, weil es nur für Punktladungen gilt; diese Voraussetzung ist zwar für den Atomkern gut erfüllt, nicht aber für die Elektronen, denn deren Dichte liegt zum einen räumlich verteilt vor, zum anderen befindet sich der Atomkern innerhalb dieser (hier als homogen angenommenen) „Ladungsdichtewolke“. Daher trägt nur ein Teil der negativen Ladung zu  $F_2$  bei. Aus Symmetriegründen ist das der Anteil, der sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $d$  um den negativen Ladungsschwerpunkt herum befindet; dieser Anteil berechnet sich anhand des jeweiligen Kugelvolumens (die Faktoren  $\frac{4}{3}\pi$  kürzen sich heraus):

$$|F_2| = \frac{q_{\text{Kern}} |q_{\text{Elektronen}}|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad \text{mit } q_{\text{Kern}} = Ze, \quad q_{\text{Elektronen}} = -Ze \frac{d^3}{R^3}.$$

Dabei ist  $d$  die Distanz zwischen den Ladungsschwerpunkten (d. h. die Dipollänge),  $R$  ist der Atomradius,  $q_{\text{Kern}}$  ist die Ladung des Atomkerns und  $q_{\text{Elektronen}}$  ist die Ladung der Elektronen, welche sich in der Kugel mit Radius  $d$  um den Schwerpunkt der negativen Ladung befinden. Die rücktreibende Kraft beträgt also

$$|F_2| = \frac{(Ze)^2 d}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1)$$

<sup>6</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/ASML>

<sup>7</sup> [https://de.wikipedia.org/wiki/Trumpf\\_\(Unternehmen\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Trumpf_(Unternehmen))

Der Gleichgewichtsabstand bei gegebenem Feld,  $d_E$ , ergibt sich aus dem Fall des Kräftegleichgewichts,  $|F_1| = |F_2|$ :

$$ZeE = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} d_E$$

$$\Rightarrow d_E = \frac{ZeE \cdot 4\pi\epsilon_0 R^3}{(Ze)^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E}{Ze}$$

- c) Für Helium ergibt sich bei einem elektrischen Feld von 1 MV/cm der folgende Gleichgewichtsabstand:

$$d_E^{\text{He}}(1 \text{ MV/cm}) = \frac{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \cdot (3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^3 \cdot 10^6 \text{ Vcm}^{-1}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$= \frac{4\pi \cdot 8,854 \cdot 27 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-33} \cdot 10^6}{2 \cdot 1,602} \cdot \frac{\text{C} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{V}}{10^{-2} \cdot 10^{-19} \cdot \text{Vm} \cdot \text{m} \cdot \text{C}}$$

$$= 937,5 \cdot 10^{-18} \text{ m} \approx 0,9 \text{ fm.}$$

(Zum Vergleich: Der Atomkernradius liegt in dieser Größenordnung.)

- d) Aus Aufgabenteil b) ist Gleichung (1) bekannt; sie läßt sich wie folgt schreiben:

$$|F_2| = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot d =: k_F \cdot d.$$

Der Bruch kann als Federkonstante  $k_F$  interpretiert werden, welche die rücktreibende Kraft  $F_2$  mit der Auslenkung  $d$  verbindet (Hooke'sches Gesetz). Für Helium ergibt sich folgender Wert:

$$k_F^{\text{He}} = \frac{(2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \cdot (3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^3} \approx 34 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Dabei gilt für die Einheiten:  $1 \frac{\text{C}^2}{\text{Fm}^{-1} \cdot \text{m}^3} = 1 \frac{\text{C}^2}{\text{CV}^{-1} \cdot \text{m}^2} = 1 \frac{\text{VC}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$

- e) Die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  eines harmonischen Oszillators ist gegeben durch  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$ . In der Atompolarisation bezieht sich  $m$  auf die Gesamtmasse der Elektronen (da diese weniger träge sind als der Atomkern):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{Zm_e}}, \text{ mit der Atomnummer (Ordnungszahl) } Z \text{ und der Elektronenmasse } m_e.$$

Für Helium ergibt sich aus dieser klassischen Betrachtung:

$$\omega_0^{\text{He}} = \sqrt{\frac{k_F^{\text{He}}}{2m_e}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ Hz} = 13,7 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}$$

Die Wellenlänge  $\lambda$  einer elektromagnetischen Welle, die zur Resonanzfrequenz dieses „klassischen Resonators“ gehört, läßt sich wie folgt berechnen:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{c_0}{\omega_0} \cdot 2\pi, \text{ mit der Lichtgeschwindigkeit } c_0.$$

Für das Heliumatom ergibt sich folgende Wellenlänge:

$$\lambda_{\text{He}} = \frac{c_0}{\omega_{\text{He}}} \cdot 2\pi = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{13,7 \cdot 10^{16} \text{ Hz}} \cdot 2\pi = 1,34 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 13,4 \text{ nm}.$$

Diese Wellenlänge entspricht UV-Licht, die zugehörige Photonenenergie liegt bei ca.  $hf = 93 \text{ eV}$ , und das ist „extremes Ultraviolett“.

- f) Die Atomdichte folgt aus dem molaren Volumen mit der Avogadro-Konstante ( $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ ) als  $n = \frac{N_A}{V_m}$ . Damit erhält man:  $n_{\text{He}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{22,414} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3} = 2,687 \cdot 10^{19} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3}$ ,  $n_{\text{Si}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{12,1} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3} = 4,98 \cdot 10^{22} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3}$ ,  $n_{\text{Pb}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{18,3} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3} = 3,29 \cdot 10^{22} \frac{\text{At.}}{\text{cm}^3}$ .
- g) Die Suszeptibilität  $\chi$  läßt sich aus dem allgemeinen Zusammenhang  $P = \epsilon_0 \chi E$  bestimmen zu  $\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E}$ . Weil hier jedes Atom ein Dipolmoment der Stärke  $\mu = q d = Ze \cdot d_E = 4\pi \epsilon_0 R^3 E$  in der gleichen räumlichen Ausrichtung beiträgt (homogenes Feld), gilt mit der Dipolmomentendichte  $n$  (was hier gleich der Dichte der Atome ist) einfach:

$$P = \frac{\sum \mu}{V} = n\mu = 4n\pi \epsilon_0 R^3 E$$

$$\Rightarrow \chi = 4\pi n R^3.$$

Für das Heliumatom ergibt sich folgender Wert:

$$\chi_{\text{He}} = 4\pi \cdot 2,687 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \cdot (3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^3 = 4\pi \cdot 2,687 \cdot 10^{19} \cdot 27 \cdot 10^{-27} = 0,912 \cdot 10^{-5}.$$

In der Literatur findet man für Helium den gemessenen Wert  $\chi_{\text{Messung}} = 6,84 \cdot 10^{-5}$ . Der hier berechnete Modellwert ist zwar kleiner, trifft aber immerhin fast die richtige Größenordnung; er ist weniger als ein Faktor 10 zu klein. Dies kann daran liegen, daß das Modell für kugelförmige Atome mit einer homogenen Elektronendichte durchgerechnet wurde, was offenbar eine zu starke Vereinfachung darstellt.

- h) Für das Siliziumatom ergibt sich folgender Wert für die Suszeptibilität:

$$\chi_{\text{Si}} = 4\pi \cdot 4,98 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \cdot (1,1 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3 = 0,83.$$

Das Modell nimmt an, daß das Atom rund ist (s-Orbital). Für Silizium ist dies keine gute Annahme, da Silizium  $sp^3$ -Orbitale besitzt. Diese  $sp^3$ -Orbitale führen durch die Konzentration der Ladungen zu einem wesentlich stärkeren Effekt der Atompolarisation; die Suszeptibilität  $\chi_{\text{Messung}} \approx 11$  von Si ist fast komplett auf Atompolarisation zurückzuführen.

- i) Für das Bleiatom ergibt sich folgender Wert für die Suszeptibilität:

$$\chi_{\text{Pb}} = 4\pi \cdot 3,29 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \cdot (1,8 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3 = 2,4.$$

Blei ist ein Metall. Elektrische Felder (und auch elektromagnetische Wellen) können nicht tief in Metalle eindringen, da elektrische Felder schon auf kurzen Distanzen (Debyelänge;  $\approx 1 \text{ nm}$ ) von den in Metallen vorhandenen freien Elektronen abgeschirmt werden (Faradayscher Käfig; elektromagnetische Wellen werden von den freien Elektronen absorbiert). Die Polarisation ist aber ein Volumeneffekt (siehe die Definitionsgleichung von  $\vec{P}$ ). Daher ist das gewählte Modell für Blei (und andere Metalle) nicht geeignet.