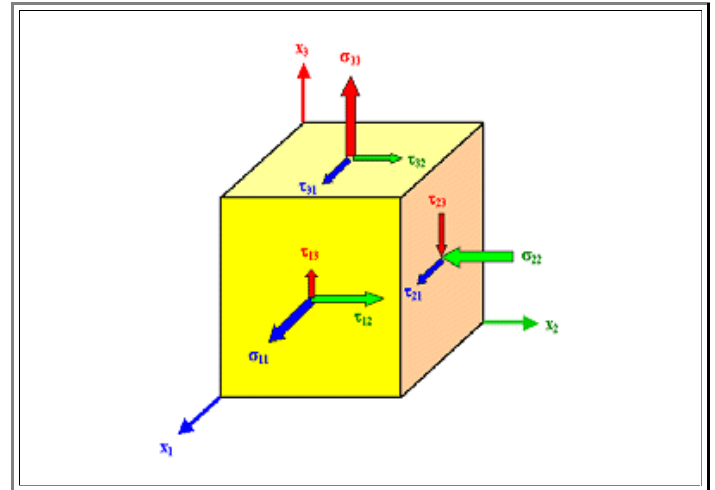


7.2.3 Merkpunkte zu Kapitel 7.2: Der allgemeine Spannungszustand

Ein beliebiger Körper verformt sich elastisch unter dem Einfluß beliebiger Kräfte. Wir **beschreiben** den Vorgang:

- Aus einem kubischen Volumenelement **dV** am Punkt **r** wird im allgemeinsten Fall ein "geschertes" Parallelepiped.
- Analogie: Aus einem kubischen Gitter wird ein triklin.
- Dazu muß auf jede Fläche des Kubus eine beliebige Spannung wirken können, die wir in eine Normal- und zwei Scherspannungen zerlegen können: ⇒
- Die "Buchhaltung" erfolgt durch zwei Indizes: Der erste gibt die Ebene an ("i" für die Ebene senkrecht zu **x_i**), der zweite die Richtung ("j" für **x_j** Richtung).



Anordnung der **σ_{ij}** und **τ_{ij}** in Matrixform ergibt einen **Tensor**. ⇒

- Da unser **dV** - Würfel sich weder bewegen noch drehen soll, sind nur **6** Komponenten unabhängig.

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Tensoren sind Weiterführungen von Vektoren; der Spannungstensor ist ein Tensor **2. Stufe**.

- Skalare = Tensoren **0. Stufe**
- Vektoren = Tensoren **1. Stufe** (**1** Unterstrich)
- Spannungen, Dehnungen = Tensoren **2. Stufe** (**2** Unterstriche)
- (**E**-Modul = Tensor **4. Stufe**).
- Tensoren **2. Stufe** verknüpfen Vektorfelder, so dass ein lokaler Vektor, z.B. ein lokaler Oberflächennormalenvektor **A** durch Multiplikation mit dem Tensor in einen anderen Vektor transformiert wird; im Beispiel in die auf die Oberfläche wirkende Kraft **F**. ⇒
- Der einfachst mögliche Fall einer solchen Verknüpfung ist, dass jede Komponenten des Kraftvektors von jeder Komponente des Oberflächennormalenvektors abhängt:

$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{A}$$

$$F_x = \sigma_{xx} \cdot A_x + \sigma_{xy} \cdot A_y + \sigma_{xz} \cdot A_z$$

$$F_y = \sigma_{yx} \cdot A_x + \sigma_{yy} \cdot A_y + \sigma_{yz} \cdot A_z$$

$$F_z = \sigma_{zx} \cdot A_x + \sigma_{zy} \cdot A_y + \sigma_{zz} \cdot A_z$$

Die Verknüpfung von Spannungstensor **σ_{ij}** und dem zugehörigen Dehnungstensor **ε_{ij}** braucht im allgemeinsten Fall jetzt einen Tensor **4. Stufe** mit **81** Komponenten; die **c_{ijkl}** heißen **elastische Koeffizienten**. ⇒

Mit Symmetrieüberlegungen läßt sich (für die hier immer unterstellten **Einkristalle**) die Zahl der elastischen Koeffizienten reduzieren:

- Im "schlimmstmöglichen" Fall (**trikline** Symmetrie) werden **21** elastische Koeffizienten gebraucht.
- Im einfachsten Fall (**kubische** Gitter), reichen **2** - daraus lassen sich dann unsere altbekannte elastische Module wie **E**, **ν**, **G** oder **K** ableiten.

$$\sigma_{11} = c_{1111} \cdot \epsilon_{11} + c_{1112} \cdot \epsilon_{12} + c_{1113} \cdot \epsilon_{13} + c_{1121} \cdot \epsilon_{21} + c_{1122} \cdot \epsilon_{22} + c_{1123} \cdot \epsilon_{23} + c_{1131} \cdot \epsilon_{31} + c_{1132} \cdot \epsilon_{32} + c_{1133} \cdot \epsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = c_{1211} \cdot \epsilon_{11} + \dots$$

.....

- Der **einfachste Fall** gilt auch für beliebige **isotrope homogene** Materialien, z.B. für alle Polykristalle mit "kleinen" willkürlich orientierten Körnern oder für isotrope amorphe Materialien - und damit für die gebräuchlichsten **technischen Werkstoffe**.

- Speziellen Spannungszuständen entsprechen "einfache" Tensoren. $\Rightarrow$

- Für einen gegebenen Tensor lässt sich durch eine geeignete Koordinatentransformation **immer** ein Koordinatensystem finden, bei dem alle Nichtdiagonalelemente = 0 sind. $\Rightarrow$

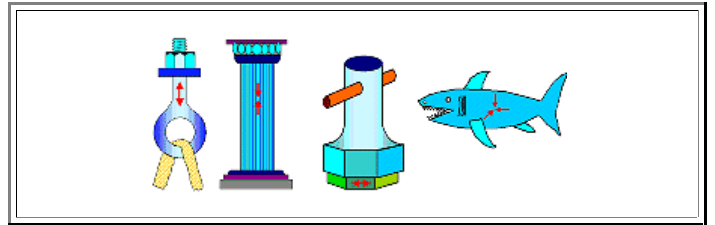
- Dieses **KO**-System heißt **Hauptachsensystem**.
- Tensoren werden, soweit möglich, immer im Hauptachsensystem notiert.
- Die verbliebenen Normalspannungen werden dann nur mit einem Index geschrieben und der Größe nach geordnet.

- Die **maximale Scherspannung** $\tau_{\max}$ die dann auftreten kann, ist gegeben durch die nebenstehende Formel. $\Rightarrow$

- Die **Ebenen** mit maximaler Scherspannung liegen unter **45°** zu den Ebenen auf denen σ_1 und σ_3 wirken.

- Bedeutung:

- Die maximal möglichen Scherspannungen bestimmen das Auftreten von **plastischer Verformung**.
- Die maximale Normalspannung σ_1 bestimmt das Auftreten von **Bruch**.



$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

