

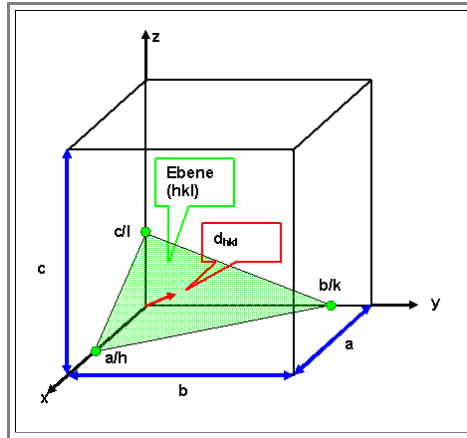
Lösung zur Übung 3.2-3

Zeige, dass für ein orthorhombisches Bravaisgitter, die Ebenen mit der Miller Indizierung $\{hkl\}$ folgenden Abstand d_{hkl} haben

$$d_{hkl} = \frac{1}{\{(h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2\}^{1/2}}$$

Illustration

Entscheidend ist eine sinnvolle Zeichnung:



Das Gitter ist im Prinzip orthorhombisch, auch wenn es ziemlich kubisch aussieht. Die grüne Ebene hat *beliebige* Indizes $h, k, l > 1$. Dadurch liegen die Schnittpunkte in der **EZ**. Entscheidend ist, dass man folgende Zusammenhänge erkennt:

1. Der Abstand zur nächsten Ebene der durch $\{hkl\}$ definierten Ebenenchar ist durch die Länge des roten Vektors gegeben, der vom Ursprung ausgeht und senkrecht auf $\{hkl\}$ steht. Denn der Ursprung liegt immer auf einer Ebene der Ebenenschar.
2. Die Länge der Strecken vom Ursprung zu den Schnittpunkten der Ebene mit den Achsen ist a/h , b/k , bzw. c/l . Das folgt direkt aus der Definition von h, k und l , die ja reziprok die Schnittpunkte in Einheiten der Gitterparameter angeben.

Der Rest ist jetzt Geometrie.

- Zunächst berechnen wir, wie lang der rote Vektor d_{hkl} ist. Dazu definieren wir die Winkel, die er mit den Koordinatenachsen bildet als α_x , α_y und α_z .
- Für die aus Ursprung, Endpunkt von d_{hkl} , und den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen gebildeten Dreiecke gilt

$$d_{hkl} = \frac{a}{h} \cos \alpha_x = \frac{b}{k} \cos \alpha_y = \frac{c}{l} \cos \alpha_z$$

Wenn man sich jetzt an die Eulersche Beziehung zwischen den Cosinüssen erinnert, liegt nahe, die Terme zu quadrieren und dann zu addieren. Wir erhalten

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 = (d_{hkl})^2 \cdot \left((h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2 \right)$$

Eulersche Beziehung

Damit sind wir fertig. Für den gesuchten Abstand d_{hkl} ergibt sich

$$d_{hkl} = \frac{1}{\{(h/a)^2 + (k/b)^2 + (l/c)^2\}^{1/2}}$$

q.e.d.

Die im [Rückgrat gegebene Formel](#) für kubische Gitter erhält man sofort durch die dann gültige Beziehung $a = b = c = a_0$ zu

$$d_{hkl}(\text{kubisch}) = \frac{a_0}{(h^2 + k^2 + c^2)^{1/2}}$$