Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Übung 3: Atomare Bindung (klassisch-phänomenologisch)

Aufgabe 5: Potential einer Feder

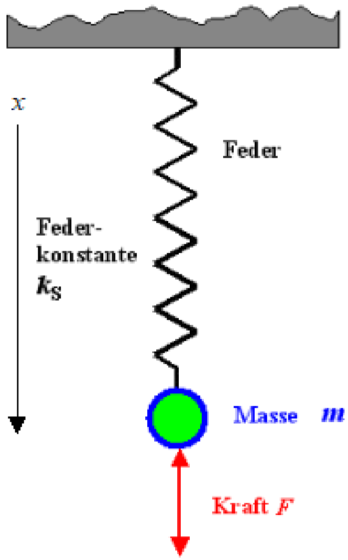

Abbildung 1: An der Decke befestigte Feder, mit angehängter Masse m und angreifender Kraft F

Gegeben sei eine klassische eindimensionale Feder (Dehnung/Stauchung nur in x-Richtung), an der eine Kraft F wirken kann, und an die wir ggf. noch eine Masse m hängen können (siehe Abb. 1). Eine solche Kraft F bewirkt eine Auslenkung Δx der Feder (relativ zu der Position des Federendes, wenn keine Kraft wirkt) in Richtung der Kraft.

a) Eine andere Feder mit dem doppelten Wert der Federkonstante würde bei gleicher Kraft nur um $\Delta x/2$ ausgelenkt werden. Wie ist die Federkonstante k_{Fed} definiert?

Wir denken uns noch die Masse m angehängt. Auf diese Masse wirkt immer die konstante Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = mg$ (hier positiv, weil sie nach unten zeigt und dies die Richtung der x-Achse ist; siehe Abb. 1). Durch die Feder ist die Masse jetzt aber an die Decke gebunden, und die Rückstellkraft F_{R} der Feder wirkt der Gewichtskraft entgegen.

b) Sei $\bar{x}_0$ die Position des Federendes bei kräftefreier Feder (keine Masse m angehängt). Leiten Sie die Formel für die neue Gleichgewichtsposition x_0 her.

c) Was ist das Bindungspotential für die Masse m? Berechnen Sie es als Arbeit, die von außen gegen die Gesamtkraft F_{ges} verrichtet wird, und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar! (Hinweis: $\Delta x > 0$ soll einer Dehnung der Feder entsprechen.)

d) Die klassische Feder ist vollkommen elastisch. Was bedeutet das wohl?

Ist die Masse m um ein (beliebiges) Δx ausgelenkt, ergibt die Summe von Feder- und Gewichtskraft nicht null; auf die Masse wirkt dann die zur jeweiligen Auslenkung gehörende Gesamtkraft F_{ges}.

e) Zeichnen Sie den Verlauf der Kraft F_{ges} mit der Position x bzw. der Auslenkung Δx direkt anhand der Potentialkurve. Wie macht man das?

Wenn wir die Masse m an der um Δx ausgelenkten Position loslassen, wird sie auf ewige Zeiten eine Schwingung ausführen (auf ewig, weil wir noch keine Dämpfung eingebaut haben).

f) Welche Energie steckt in der Schwingung? Wie kann man das Energieniveau einer Schwingung mit der Auslenkung $\pm\Delta x$ in der Potentialkurve sehr anschaulich darstellen?

g) Die Masse „pendelt" jetzt zwischen zwei Positionen. Wo ist sie im Mittel? Wie kann man die mittlere Position im Potentialbild einzeichnen?

Eine ideale Feder gibt es in der Wirklichkeit nicht. Ziehen wir sie zu lang, oder stauchen wir sie zu sehr, werden wir Probleme bekommen.

i) Skizzieren Sie schematisch die Potential- und die Kraftkurve für eine Feder, die bei großen Auslenkungen (egal welchen Vorzeichens) sehr viel steifer wird, die also ihre Länge trotz weiter zunehmender Kraft nur noch wenig ändert.

j) Skizzieren Sie die Potentialkurve einer Feder, die beim Zusammendrücken immer härter wird, während sie beim Auseinanderziehen immer weicher wird, bis $k_{\text{Fed}} \to 0$.

k) Wie ist das in den Fällen der Fragen i) und j) mit der in der Oszillation der Masse steckenden Energie? Kann man das immer noch im Potentialbild leicht sehen?

l) Zeichnen Sie ein, wo sich die Masse im Mittel befindet, wenn sie in dem Potential von Frage j) hin und her schwingt.

Wir machen jetzt das System immer kleiner, so klein, wie es irgend geht, und betrachten Atome in einem Kristall.

m) Wie läßt sich die Situation von Abb. 1 auf atomare Verhältnisse übertragen? Was entspricht der Masse m, was der Feder, was der Decke? Ändert sich bei atomaren Verhältnissen etwas an der Bewegung der „Masse" (d. h. dessen, was der Masse entspricht) gegenüber den oben untersuchten Fällen?

n) Übertragen Sie den Fall von Frage l) auf das Verhalten eines Atoms; betrachten Sie dabei unterschiedlich starke maximale Auslenkungen. Was führt bei einem Atom zu unterschiedlich starken maximalen Auslenkungen? Was also bedeutet die Verbindungslinie all dieser mittleren Positionen anschaulich; welche physikalische Größe steckt darin?

Aufgabe 6: Schwingungsfrequenz der Bindung

Gegeben sei ein Bindungspotential der Form $U(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$ (Lennard-Jones-Potential; vgl. Aufgabe 1, Übung 1). Wir betrachten ein Material, das sich mit diesem Potential beschreiben läßt (d. h., für das die Verwendung dieses Potentials sinnvolle Ergebnisse liefert), und zwar in einem Bereich, in dem es sich vollständig linear-elastisch verhält (konstanter Elastizitätsmodul). In diesem Fall ist es eine sinnvolle Näherung, das komplette Potential durch eine Taylor-Entwicklung bis zum quadratischen Term um das Minimum (bei r_0) zu ersetzen:

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}(r_0)\cdot(r-r_0)^2 \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}(r_0) = U_0\,\frac{nm}{r_0^2} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, daß das Ergebnis von Gl. (1) für die zweite Ableitung von U an der Stelle r_0 korrekt ist.

Die generelle Bewegungsgleichung mit der Lösung für die Resonanz- oder Eigenfrequenz einer harmonischen Schwingung lautet (für die Variable $x = r - r_0$)

$$m_\mathrm{A} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k_\mathrm{Fed}\, x = 0,$$

mit m_A = Masse des schwingenden Atoms und k_Fed = Federkonstante. Für die Eigenfrequenz (hier: Kreisfrequenz) ω der Schwingung gilt allgemein

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\mathrm{Fed}}{m_\mathrm{A}}}, \tag{2}$$

hier speziell

$$\omega = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{U_0\, n\, m}{m_\mathrm{A}}}.$$

b) Leiten Sie Gl. (2) für ω her und zeigen Sie dann, daß für die Federkonstante tatsächlich $k_\mathrm{Fed} = \frac{U_0\, n\, m}{r_0^2}$ gilt.

Wenn wir uns jetzt noch an die bereits in der Vorlesung abgeleitete Beziehung für den Elastizitätsmodul erinnern, können wir ω auch wie folgt ausdrücken:

$$\omega = \sqrt{\frac{E\, r_0}{m_\mathrm{A}}}$$

c) Zeigen Sie, daß diese Gleichung stimmt.

d) Bestimmen Sie damit die Größenordnung von ω für ein einfaches Material wie z. B. Silizium. (Hinweise: Werte für den E-Modul und für die Masse der Atome sollten leicht aufzufinden sein. Statt des Gleichgewichtsabstands r_0 findet man typischerweise Angaben für die Gitterkonstante a von Silizium. Es gilt: r_0 ist ein Viertel der Raumdiagonale des Würfels mit der Kantenlänge a; warum das so ist, wird sich bald klären.)

e) Was für Konsequenzen könnten sich daraus für die Wechselwirkung von „sehr hochfrequentem Wechselstrom“ (d. h. in Form einer elektromagnetischen Welle) und dem Material ergeben, wenn die Frequenz des Wechselstroms (bzw. der Welle) ebenfalls in dieser Größenordnung liegt? Kennen Sie eine praktische Anwendung dafür?