Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Übung 2: Mathematische Grundlagen II

Aufgabe 4: Grundlagen der Beschreibung von Wellen

Eine dreidimensionale ebene Welle läßt sich mathematisch als $A(\vec{r},t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\}$ angeben. [Hinweise: $\exp(\mathrm{i}\phi) = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ (Eulersche Formel), i: imag. Einheit, ϕ: Phase.]

a) Was bedeutet die Eulersche Formel anschaulich (in der Ebene der komplexen Zahlen betrachtet), wenn ϕ eine sich gleichmäßig ändernde relle Variable ist?

b) Warum wird durch $A(\vec{r},t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\}$ eine *ebene* Welle beschrieben? (Hinweise: Betrachten Sie eine Wellenfront zu einem festen Zeitpunkt t_0 und beziehen Sie sich auf die Normalform der Ebenengleichung.)

Wählen Sie zur Vereinfachung die x-Achse in der Bewegungsrichtung der Welle und rechnen Sie bei den Aufgabenteilen c) bis g) eindimensional. Das wird dadurch erreicht, daß wir dann die y- und die z-Koordinate nicht mehr benötigen (weil jetzt alles *nur* noch von der x-Koordinate abhängt) und sie auf irgendeinen willkürlichen Wert setzen können; wir wählen dafür $y = 0 = z$.

c) Eine Welle besitzt eine räumliche Periodizität, d. h. sie wiederholt sich in der Bewegungsrichtung *erstmalig* nach der Wellenlänge λ. Folglich gilt für eine Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, $A(x+\lambda,t) = A(x,t)$. Zeigen Sie, daß damit $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist.

d) Eine Welle besitzt eine zeitliche Periodizität, d. h. sie wiederholt sich *erstmalig* nach der Periodendauer T. Für eine Welle gilt also $A(x,t+T) = A(x,t)$. Zeigen Sie: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

e) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit dieser Welle? Leiten Sie die Formel dafür her. (Hinweis: Die Phasengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Punkten gleicher Phasenlage.)

f) Zeichnen Sie für einen festen Zeitpunkt t_0 den Realteil von $A(x,t)$. Was ist dabei die Bedeutung des Anteils ωt_0? Wie kann man $|\vec{k}| = k_x$ mit einzeichnen? (Hinweis: Das geht nur indirekt.) Worin würde sich das Bild des Imaginärteils der Welle von dem des Realteils unterscheiden?

g) Zeichnen Sie Real- und Imaginärteil von $A(x,t)$ als Funktion der Zeit an einem festen Ort x_0. Wie kann man ω mit einzeichnen? (Hinweis: Das geht nur indirekt.)

Verallgemeinern Sie die bisherigen „eindimensionalen“ Erkenntnisse auf den dreidimensionalen Fall. (Hinweise: Ein Sternchen an einzelnen Aufgabenteilen weist Sie generell darauf hin, daß diese Fragen anspruchsvoller sind und etwas mehr Nachdenkzeit erfordern; zum Teil muß man auch etwas „um die Ecke denken“. Auch in der Klausur wird es solche Aufgaben geben.)

h) * Was ist die Bedeutung von $\vec{k}$? [Hinweis: Berücksichtigen Sie hier die Antworten zu den Aufgabenteilen c) bis f).]

i) * Was ändert sich an der ebenen Welle, wenn gilt: $A(\vec{r},t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)\}$, d. h. mit einem Pluszeichen statt des Minuszeichens im Argument der Exponentialfunktion?

j) * Was ändert sich an der physikalischen Bedeutung von $A(r,t)$, wenn $A(r,t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(kr - \omega t)\}$ gilt, d. h. mit $k = |\vec{k}|$ und $r = |\vec{r}|$ statt $\vec{k}$ und $\vec{r}$?