Übungen zu den „Grundlagen der Materialwissenschaft“

Lösungen zur 2. Übung: Mathematische Grundlagen II

Aufgabe 4: Grundlagen der Beschreibung von Wellen

a) Die Eulersche Formel, $\exp(\mathrm{i}\phi) = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ (mit der imaginären Einheit i und dem Phasenwinkel ϕ), kann auf unterschiedliche Weise veranschaulicht werden:

(i) Mathematisch gesehen, gibt sie eine komplexe Zahl an, die auf dem Einheitskreis liegt (Kreis mit Radius 1 um den Ursprung des Koordinatensystems in der Ebene der komplexen Zahlen). Wenn sich die reelle Variable ϕ gleichmäßig ändert, bedeutet das anschaulich, daß man gleichmäßig auf dem Einheitskreis herumläuft; wenn ϕ zunimmt, bewegt man sich im mathematisch positiven Sinn, d. h. gegen den Uhrzeigersinn. Die Positionen auf dem Kreis wiederholen sich jeweils nach einer Veränderung von ϕ um 2π.

(ii) Elektrotechnisch gesehen, schaut man separat auf Real- bzw. Imaginärteil dieser komplexen Zahl und erhält eine Kosinus- bzw. Sinuskurve. Wenn ϕ proportional zur Zeit ist, dann repräsentieren diese Kurven den zeitlichen Verlauf eines entsprechenden Signals bzw. einer elektrischen Schwingung.

b) Wir betrachten die Welle zu einem festen Zeitpunkt t_0. Die Wellenfront besteht aus allen direkt benachbarten Stellen $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit gleichem „Auslenkungswert“ der Welle, d. h. mit $A(\vec{r}, t_0) = \text{const}$. Daraus folgt die Bedingung $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t_0 = \text{const}$ (bzw. $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} + \omega t_0$, was auch konstant ist), und das ist die Normalform einer Ebenengleichung: Das Skalarprodukt zwischen $\vec{k}$ und $\vec{r}$ kann als $\vec{k} \cdot (\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) = \vec{k} \cdot \vec{r}_\parallel + \vec{k} \cdot \vec{r}_\perp$ geschrieben werden, und weil $\vec{k} \cdot \vec{r}_\perp = 0$ für beliebige $\vec{r}_\perp$, läuft $\vec{r}_\perp$ über alle Punkte einer Ebene, die senkrecht zu $\vec{k}$ liegt. Das sind die gesuchten direkt benachbarten Stellen, welche die Wellenfront bilden. Fazit: Weil die Wellenfronten Ebenen sind, handelt es sich um eine ebene Welle.

c) Es gilt: $A(x + \lambda, t) = A(x, t)$, d.h. $A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_x \lambda - \omega t)\} = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_x \lambda - \omega t)\}}{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}} = \exp\{\mathrm{i} k_x \lambda\}$$

Mathematisch bedeutet dies zunächst nur, daß $k_x \lambda = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Weil aber physikalisch die Wellenlänge als *erstmalige* Wiederholung definiert ist und weil 2π die erstmalige Wiederholung auf dem Einheitskreis darstellt, ist die physikalische relevante Lösung einzig und allein $k_x \lambda = 2\pi$ (denn sonst wäre λ nicht die Wellenlänge).

d) Es gilt: $A(x, t + T) = A(x, t)$, d.h. $A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t - \omega T)\} = A_0(x) \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t - \omega T)\}}{A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}} = \exp\{-\mathrm{i}\omega T\}$$

Daraus folgt $\omega T = 2\pi$, denn sonst wäre T nicht die Periodendauer (*erstmalige* Wiederholung). Weil für die Frequenz einer Schwingung $f = \frac{1}{T}$ gilt, kann man auch $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ schreiben, d. h. es handelt sich bei ω um die bereits bekannte Kreisfrequenz.

e) Weil die x-Achse in Richtung der Wellenausbreitung liegt, vereinfacht sich der Ausdruck für die Phase der Welle zu $k_x x - \omega t = \text{const}$ bzw. $k_x x = \text{const} + \omega t$. Dies liefert explizit die Zeitabhängigkeit der Position der Wellenfront: $x(t) = \widetilde{\text{const}} + \omega t / k_x$. Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} durch Ableitung nach t zu $v_{\text{Ph}} = \omega / k_x = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}$.

Das ist genau die Geschwindigkeit, die man auch rein anschaulich erwartet: Innerhalb einer Periodendauer T legt die Welle genau die Entfernung einer Wellenlänge λ zurück. Insofern ist dieses Ergebnis keine neue Information, sondern es zeigt, daß sich in dem hiesigen Formalismus die bekannten Eigenschaften wiederfinden.

f) Zerlegung von $A(x, t_0)$ in in Real- und Imaginärteil: $A(x, t_0) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t_0)\} = A_0 \cos(k_x x - \omega t_0) + \mathrm{i} A_0 \sin(k_x x - \omega t_0)$. Hierbei ist ωt_0 die Phasenlage der Welle; ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $t_0 = 0$ gewählt. Damit ist $\text{Re}\{A(x, t_0)\} = A_0 \cos(k_x x)$ (siehe Abb. 1); k_x kann als $\lambda = 2\pi / k_x$ eingezeichnet werden. Der Imaginärteil ist gegenüber dem Realteil um $\pi/2$ phasenverschoben (Phasenunterschied zwischen Sinus und Kosinus), was einer Verschiebung im Ort von $\lambda/4$ entspricht.

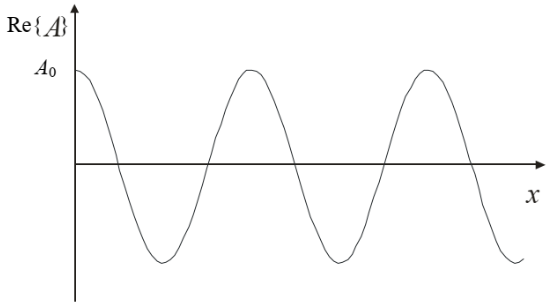

Abbildung 1: Realteil von $A(x, t)$ für den festen Zeitpunkt $t_0 = 0$.

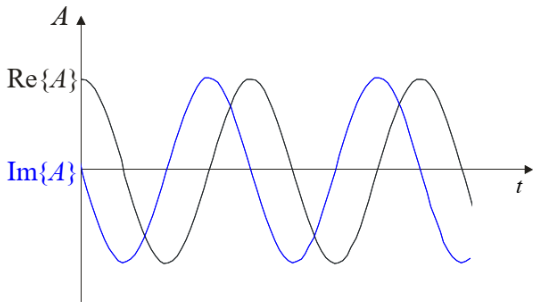

Abbildung 2: Real- und Imaginärteil von $A(x, t)$ am festen Ort $x_0 = 0$.

g) Zerlegung von $A(x_0, t)$ in in Real- und Imaginärteil: $A(x_0, t) = A_0 \exp\{\mathrm{i}(k_x x_0 - \omega t)\} = A_0 \cos(k_x x_0 - \omega t) + \mathrm{i} A_0 \sin(k_x x_0 - \omega t)$. Hierbei ist $k_x x_0$ die Phasenlage der Welle; o. B. d. A. wird $x_0 = 0$ gewählt. Damit hat man $A(0, t) = A_0 \cos(-\omega t) + \mathrm{i} A_0 \sin(-\omega t) = A_0 \cos(\omega t) - \mathrm{i} A_0 \sin(\omega t)$. An einem festen Ort zeigt sich also eine Schwingung mit der Amplitude A_0. Es sind die Phasenverschiebung zwischen Real- und Imaginärteil sowie das Vorzeichen des Imaginärteils zu beachten (siehe Abb. 2). Hier kann ω als $T = 2\pi/\omega$ eingezeichnet werden.

h) Im Aufgabenteil a) haben wir die Welle zu einem festen Zeitpunkt t_0 betrachtet. Zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ (wobei hier $0 < \Delta t < T$ gelten soll) ist derselbe Wert des Ausdrucks $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t_0 = \text{const}$, d. h. dieselbe Wellenfront (Phasenlage der Welle wie zuvor), bei anderen, benachbarten $\vec{r}$ zu finden – die Welle ist weitergelaufen. Die Richtung des Weiterlaufens ergibt sich wie folgt: $\vec{r}\,'$ bezeichne die neuen Positionen der Wellenfront; für diese gilt: $\vec{k} \cdot \vec{r}\,' = \text{const} + \omega(t_0 + \Delta t) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega \Delta t$, d. h. $\vec{k} \cdot \vec{r}\,' > \vec{k} \cdot \vec{r}$. Das bedeutet, daß die Projektionen aller Ortsvektoren auf $\vec{k}$ größer geworden sind, sie sind also in Richtung von $\vec{k}$ verschoben. Daher ist $\vec{k}$ der Wellenvektor der Welle: Er gibt die Ausbreitungsrichtung an, weil $\lambda = 2\pi / |\vec{k}|$ ist – denn eine Ausbreitung schräg zu $\vec{k}$ ergäbe ein falsches λ.

i) Berechnet man die Phasengeschwindigkeit, sieht man, daß diese Welle in Richtung $-\vec{k}$ läuft.

j) Diese Gleichung beschreibt eine (unphysikalische) Kugelwelle, die vom Ursprung nach außen läuft. (Sie ist unphysikalisch, weil ihre Amplitude konstant bleibt; das ist aber wegen der Energieerhaltung nicht möglich.)