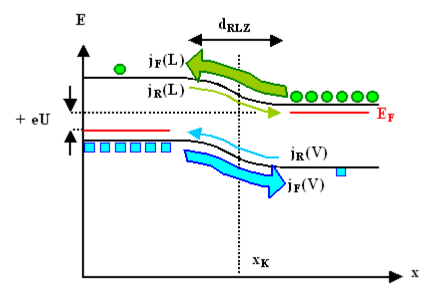
9.4.3 Die Kennlinie des pn-Übergangs

Herleitung der "idealen" Kennlinienformel

- Was geschieht am (idealen) **pn**-Kontakt, wenn wir, wie beim Volumen-Oberflächen-Kontakt, jetzt eine externe Spannung anlegen?
  - Im Gegensatz zu dem bereits erfolgten Gedankenversuch in dieser Richtung sollten wir das jetzt *wirklich* tun. Dafür gibt es zwei Gründe:
  - **1.** Das geht! Ein Stück **Si** kann *man* kontaktieren (*wir* übrigens auch bald). Sowohl zu **p-** als auch zu **n-Si** können reale ohmsche Kontakte gemacht werden; es gibt weder technische noch begriffliche Schwierigkeiten.
  - **2.** Wir erwarten, daß durch eine Diode *Strom fließen wird* (und dann *kein* Gleichgewicht vorliegen wird), und dazu braucht man selbst in einem Gedankenversuch einen geschlossenen Stromkreis mit Kontakten.
- Unsere frühere Überlegung, was geschieht, wenn ein externes Potential U_{ext} angelegt wird, bleibt aber unverändert:
  - Wir müssen die linke und rechte Seite des Kontakts um eU_{ext} gegeneinander verschieben.
  - Die Fermienergie ist dann aber nicht mehr konstant; im strengen Sinne gibt es sie gar nicht mehr! Wir können also nicht mehr mit Schritt **1** des Gleichgewichtsrezepts beginnen.
- Andererseits wird weit weg vom **pn-**Übergang nicht viel passieren, was vom Gleichgewichtszustand sehr verschieden ist. Falls jetzt Strom fließt, sind die Gebiete weit weg vom **pn**-Übergang simple Leiter oder besser gesagt ohmsche Widerstände, und ihr Banddiagramm ist schlimmstenfalls leicht gekippt, wie für diesen Fall bereits betrachtet.
  - Wir verlieren durch diese **Bahnwiderstände** links und rechts vom **pn-**Übergang also allenfalls einen kleinen Teil der angelegten Spannung; dies werden wir erstmal schlicht ignorieren.
- Damit können wir links und rechts vom **pn**-Übergang die Bandstruktur wie gewohnt zeichnen, wir können sogar die Fermienergie wieder einzeichnen, um anzudeuten, daß wir nicht weit weg vom Gleichgewicht sind.
  - Gegenüber der Gleichgewichtskonstruktion für $U_{ext} = 0$ **V** müssen wir also nur eines der Bänder zusätzlich um eU_{ext} verschieben und die beiden Bänder dann wieder "nach Gefühl" verbinden. Das sieht dann so aus:

- Falls wir rechts den *Minuspol* der Spannungsquelle anschließen, erhöhen wir das Potential der Elektronen, die **n-**Seite rutscht um $-eU_{ext} = +e|U_{ext}|$ nach oben (oder die **p-**Seite nach unten; wir sind frei bei der Wahl des Nullpunkts).
- Die Raumladungszone wird kleiner – "gefühlsmäßig", oder nach Formel –, falls wir statt ΔE wieder $\Delta E_{delta} - eU_{ext}$ einsetzen (für diesen Fall ist U_{ext} also positiv).
- Die Energiebarriere wird *kleiner*. Der *Diffusionsstrom* wird sich also deutlich erhöhen; es haben jetzt viel mehr Elektronen im **n-Si** und Löcher im **p-Si** genügend Energie, um vom eigenen Schwung getragen über den Berg zu kommen.
- Der *Feldstrom* bleibt jedoch unverändert. Die Zahl der pro Sekunde an die **RLZ**-Kante kommenden Minoritäten ist unverändert, und wie tief es hinuntergeht, spielt keine Rolle.



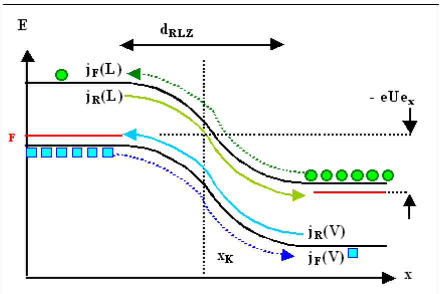
(Hinweis: In dieser Abbildung sind die Teilströme noch englisch beschriftet: Diffusionsstrom=forward current j_F, Feldstrom=reverse current j_R)

  - Die Diffusionsströme in den jeweiligen Bändern sind also mit wachsender Spannung schnell deutlich größer als die Feldströme (die wir dann vernachlässigen können); wir haben einen *Nettostromfluß* in Durchlaßrichtung $j_{ext}(U_{ext} > 0)$ im äußeren Stromkreis, der ziemlich heftig (vermutlich wohl exponentiell) von der externen Spannung abhängen wird und immer gegeben ist durch

$$j_{ext}(U_{ext} > 0) \;=\; \Big(j_D(L) \;-\; |j_F(L)|\Big) \;+\; \Big(j_D(V) \;-\; |j_F(V)|\Big) \;\approx\; j_D(L) \;+\; j_D(V)$$

- Falls wir die Polarität umdrehen, erhalten wir folgendes Banddiagramm:

- Das Potential der Elektronen (also die **n-**Seite) rutscht um eU_{ext} nach unten (oder die **p-**Seite nach oben).
- Die Raumladungszone wird größer – "gefühlsmäßig", oder nach Formel, falls wir statt ΔE_F wieder $\Delta E_F - eU_{ext}$ einsetzen (für diesen Fall ist also U_{ext} negativ).
- Die Energiebarriere wird *größer* . Der *Diffusionsstrom* wird also deutlich kleiner; wir können ihn vernachlässigen.
- Der *Feldstrom* bleibt jedoch unverändert. Die Zahl der pro Sekunde an die **RLZ**-Kante kommenden Minoritäten ist unverändert, und wie tief es hinuntergeht, spielt keine Rolle.
- Als *Nettostromfluß* $j_{ext}(U_{ext} < 0)$ im äußeren Stromkreis bleibt in Sperrichtung also nur noch der Feldstrom. Er ist konstant und gegeben durch



(Hinweis: In dieser Abbildung sind die Teilströme noch englisch beschriftet: Diffusionsstrom=forward current j_F, Feldstrom=reverse current j_R)

$$j_{ext}\,(U_{ext} < 0) = \Big(j_D(L) - |j_F(L)|\Big) + \Big(j_D(V) - |j_F(V)|\Big) \approx -\Big(|j_F(L)| + |j_F(V)|\Big)$$

- Nicht unflott! Wir haben ein typisches Diodenverhalten: Für eine Spannungspolarität fließt ein mit der Spannung rasch zunehmender **Durchlaßstrom** durch die Diode, für die andere Polarität ein konstanter spannungsunabhängiger **Sperrstrom**.
  - Durchlaßrichtung ist für **n** egative Polung am **n**-Bereich, **p** ositive Polung am **p**-Bereich – leicht zu merken.
  - Ob die Energie für eine gegeben Polarität rauf- oder runtergeht, ist ebenfalls leicht zu merken: In Flußrichtung der Elektronen wird eine Energiebarriere niedriger, falls auf der anderen Seite ein positives Potential dazukommt; für Löcher natürlich umgekehrt.
- Alles, was uns noch fehlt, ist eine weitere Gleichung – wir müssen die Spannungsabhängigkeit des Diffusionsstromes beschreiben.
  - Das können wir aber ziemlich einfach tun. Wir kennen zwei essentielle Eigenschaften des Diffusionsstromes:
  - **1.** Er fließt über eine Energiebarriere (oder Energieschwelle) der Gesamthöhe $\Delta E_F \pm e|U_{ext}|$. Er fließt überhaupt, weil die stromführenden Teilchen eine durch die Temperatur bedingte Energieverteilung haben und es einige damit schaffen können, die Energiebarriere zu überwinden. Damit muß er der allgemeinen Formel für diesen Fall gehorchen, d. h. wir brauchen irgendeinen Vorfaktor c und den entsprechenden **Boltzmannfaktor**, der die von der externen Spannung U_{ext} abhängige Energiebarriere $\Delta E_F - eU_{ext}$ enthält.
  - Damit ist schon alles klar – der Diffusionsstrom läßt sich wie folgt schreiben:

$$j_D\,(U_{ext}) = c \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_F - eU_{ext}}{k_B T}\right)$$

  - **2.** Ohne äußere Spannung, d.h. im Gleichgewicht für $U_{ext} = 0$, ist der Diffusionsstrom in jedem Band für sich gleich dem (negativen) Feldstrom, d.h. $j_D(U_{ext}=0) = -j_F = |j_F|$. Damit haben wir für $j_D(U_{ex})$:

$$j_D(U_{ext}) = c \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_F - eU_{ext}}{k_B T}\right) = \underbrace{c \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_F}{k_B T}\right)}_{\substack{\| \\ j_D(U_{ext}=0)=\ |j_F|}} \cdot \exp\left(\frac{+\,eU_{ext}}{k_B T}\right)$$

$$j_D(\,U_{ext}\,) = |j_F| \cdot \exp\left(\frac{+\,eU_{ext}}{k_B T}\right)$$

Das war's. Wir müssen jetzt nur noch alles zusammensetzen und erhalten eine erste Form der **Diodengleichung** (ab hier wird beim externen Strom *j* der Index "ext" weggelassen):

$$j(U_{ext}) = \left(|j_F(L)| + |j_F(V)| \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_BT} \right) - 1 \right)$$

Üblicherweise wird der Vorfaktor $\left(|j_F(L)| + |j_F(V)| \right)$ ganz simpel als j_0 geschrieben – denn man weiß ja, daß es der Betrag des Feldstroms ist. Außerdem kann, wie schon beim Stom, auch bei der Spannung der Index "ex" weggelassen werden. Damit lautet die einfachste Form der Diodengleichung (was auch die übliche Kennliniengleichung ist):

$$j(U) = j_0 \cdot \left(\exp\left(\frac{eU}{k_BT} \right) - 1 \right)$$

Aber Vorsicht: Das sieht einfacher aus, als es ist, denn wir müssen immer die Konvention für die Vorzeichen der Ströme und Spannungen in der Diodengleichung berücksichtigen:

- *Ströme in Durchlaßrichtung* werden immer als *positiv* betrachtet.
- *Spannungen in Durchlaßrichtung* werden immer als *positiv* betrachtet.

Somit ergibt sich grundsätzlich ein *Vorzeichenwechsel* zwichen der über der Diode extern angelegten Spannung U_{ext} und der über dem **pn**-Kontakt ohne Stromfluß intern abfallenden Spannung U_{bi}, mit der man z.B. die Weite der Raumladungszone berechnet.

Zusätzlich wissen wir auch schon, wie groß die Sperrströme sind: Generationsrate (= Rekombinationsrate = $n_{Min}(L) / \tau$) mal Einzugsgebiet (= L) mal Ladung (±**e**). Einsetzen ergibt die *klassische* Diodengleichung:

$$j(U_{ext}) = \left(\frac{e \cdot L \cdot n_{Min}(L)}{\tau} + \frac{e \cdot L \cdot n_{Min}(V)}{\tau} \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_B T} \right) - 1 \right)$$

Schreiben wir die Minoritätsladungsträgerdichte mit Massenwirkungsgesetz und Dotierung als $n_{Min} = (n_i)^2 / N_{Dot}$, erhalten wir:

$$j(U_{ext}) = \left(\frac{e \cdot L \cdot (n_i)^2}{N_A \cdot \tau} + \frac{e \cdot L \cdot (n_i)^2}{N_D \cdot \tau} \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_B T} \right) - 1 \right)$$

Da die Diffusionslänge L und die Lebensdauer τ eng verwandt sind, kann man über die fundamentale Beziehung $L = (D \cdot \tau)^{½}$ oder $\tau = (L^2 / D)$ natürlich einen der beiden herauswerfen; man erhält dann zum Beispiel ...

... nach Eliminierung von τ:

$$j(U_{ext}) = \left(\frac{e \cdot D \cdot (n_i)^2}{N_A \cdot L} + \frac{e \cdot D \cdot (n_i)^2}{N_D \cdot L} \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_B T} \right) - 1 \right)$$

... nach Eliminierung von L:

$$j(U_{ext}) = \left(\frac{e \cdot (n_i)^2}{N_A} \left(\frac{D}{\tau} \right)^{½} + \frac{e \cdot (n_i)^2}{N_D} \left(\frac{D}{\tau} \right)^{½} \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_BT} \right) - 1 \right)$$

Und so weiter – man kann den Vorfaktor, der die Feldströme enthält, in noch mehr Varianten schreiben – das kann man auch als intellektuelles Spiel sehen. Die erste Version ist vielleicht am klarsten bezüglich der Natur der Ströme, die letzte bezüglich der entscheidenden Parameter.

Schauen wir uns die wesentlichen Parameter noch einmal einzeln an:

- Der *Diffusionskoeffizient* D der Ladungsträger ist primär eine Materialkonstante. Er ist über die Einstein-Beziehung mit der Beweglichkeit **µ** gekoppelt und damit etwas von Defekten, der Temperatur und der Dotierung abhängig.
- Die *intrinsische Ladungsträgerkonzentration* n_i ist eine echte Materialkonstante – sie spiegelt die Bandlücke wider – und natürlich sehr stark die Temperatur.
- Die *Diffusionslänge* L ist zunächst eine Funktion des Bandtyps (direkt oder indirekt) und dann ein Maß für die Kristallperfektion.
- Die *Dotierkonzentration* N_{Dot} ist der Technologieparameter – der *einzig* absichtliche! Mit ihm können wir hier nicht furchtbar viel bewirken; aber das wird sich noch ändern.
- Die *Temperatur* T steht explizit und implizit in der Formel. Einmal über n_i, ein zweites Mal über D bzw. **µ**, ein dritte Mal über N_{Dot} – bei tiefen Temperaturen bricht die "mittlere Temperaturnäherung " zusammen! Auch wenn nicht jeder Informatiker und Elektrotechniker es gerne hört: Realisierte Informations- und Kommunikationstechnologie ist angewandte **Thermodynamik** (und selbstverständlich **Quantentheorie**).
- Die *externe Spannung* U_{ext} ist, wenn man so will, die Inputgröße, die Stromdichte $j(U_{ext})$ ist die Outputgröße der Diode.

Eigenschaften der Kennlinie

Zunächst halten wir erstmal fest: Ein **pn-**Kontakt ist *immer* eine **Diode**. Strom fließt nur, falls die Polarität der angelegten Spannung "stimmt".

Das ist inzwischen fast eine Trivialität, aber wir haben inzwischen die Ebene des Gedankenversuchs verlassen und sollten und darüber klar werden: Jeder von uns hat zu Hause so um die **100 000 000 - 10 000 000 000 pn-Übergänge** um sich herum, die als unsichtbare (aber nicht immer wirklich stumme) Diener für uns arbeiten.

Hätten wir nicht inzwischen eine intime Beziehung zur Kennlinienformel, könnte man sie fast für furchteregend halten. Wir aber verstehen sofort die möglichen einfachen Näherungen:

Für **p**ositive Spannungen am **p-Si** (leicht zu merken) ist der Exponentialterm sehr schnell sehr viel größer als **1**; wir können die "**–1**" vergessen und erhalten für den *Durchlaßstrom einer Diode* in guter Näherung:

$$j_D \approx \left(|j_F(L)| + |j_F(V)| \right) \cdot \exp\left(\frac{eU_{ext}}{k_BT} \right)$$

In anderen Worten: Es handelt sich um eine simple Exponentialfunktion. Für $eU_{ext} = k_BT$ (oder $U \approx 1/40$ V) ist der Durchlaßstrom um einen Faktor **e** größer als der Sperrstrom j_F, d.h. immer noch ziemlich klein; aber für $U \approx 1$ V ist er schon sehr viel größer (um e^{40}!).

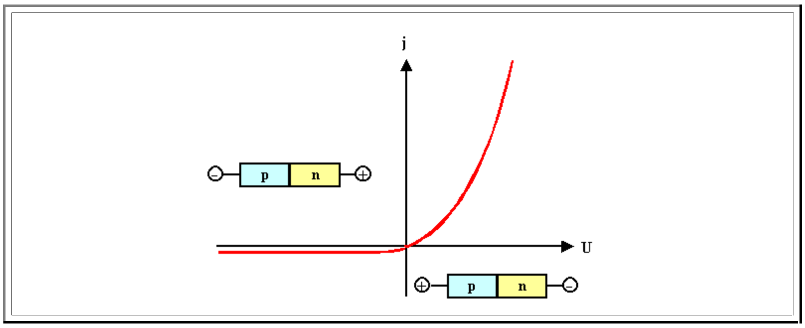
In Sperrichtung wird der Exponentionalterm schnell gegen null tendieren, d.h. wir haben die extrem einfache Beziehung für den *Sperrstrom* (=Feldstrom):

$$j_F \approx j_F(L) + j_F(V)$$

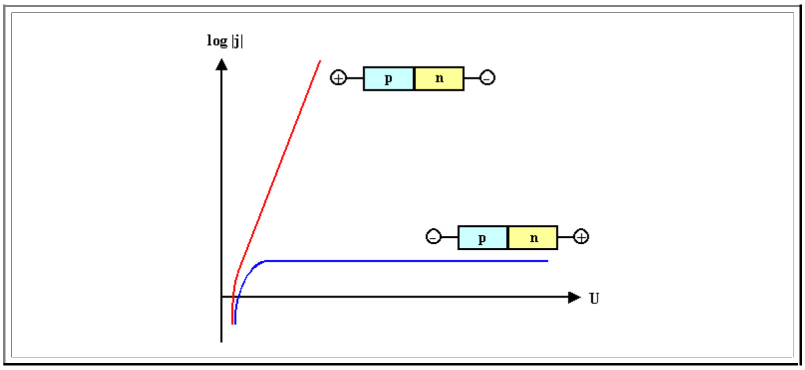
Einfacher geht's nicht.

Wie die Kennlinie jetzt aussieht, ist also hinreichend klar. Hier zwei Arten der Darstellung:

Zuerst die einfache *lineare* Auftragung.



- Hier die wesentlich aussagekräftigere Darstellung mit logarithmischer Stromdichte (und Beträge von Spannung und Strom)



- Zahlen sind absichtlich nicht eingefügt, denn die erarbeiten wir uns in Übungsaufgaben.
- So ganz langsam sollte jetzt eine ganz wichtige Frage hochkommen:
  - *Stimmt das auch alles?* Was sagt das Experiment (denn nur das zählt!)?
- Das Experiment sagt: *Es kommt darauf an* – und zwar auf ziemlich viele Dinge. Zunächst haben wir den fundamentalen Unterschied: *ideale* Diode – *reale* Diode. Berechnet haben wir die ideale Diode. Hier sind die Unterschiede:

	Ideale Diode	**Reale Diode**
Geometrie	"Unendlich" ausgedehnt ab Kontakt, zumindest sind alle Abmessungen **>> *L***	Sehr klein; alle Abmessungen **<< *L***
Dotierung	Konstant	Variiert stark mit Entfernung vom Kontakt
Bahnwiderstände	Keine	Immer vorhanden
Parallelwiderstände ("lokale Kurzschlüsse")	Keine	Je nachdem
Einfluß Oberflächen	Keine	Potentiell groß, da immer nahe zum Kontakt
Zulässige Spannungen	Alle	Wird bei Durchlaßspannungen >> wenige **V** zu heiß; knallt durch bei zu hohen Sperrspannungen.
Generation/ Rekombination in RLZ	Keine	Immer vorhanden

- Alle Punkte bei der Realdiode *mit Ausnahme des letzten* könnten wir eliminieren, falls wir uns Mühe geben und eine (technisch nutzlose) Diode bauen, die unserer Idealdiode nahe kommt.
  - Was wir dann erhalten, läßt sich pauschal wie folgt ausdrücken
    - Für Halbleiter mit relativ kleinen Bandlücken (**< ca. 0,8 eV**; z.B. **Ge**) stimmt die Theorie ziemlich gut.
    - Für Halbleiter mit relativ großen Bandlücken (**> ca. 1 eV**; z.B. **Si**) stimmt die Theorie ziemlich schlecht. Insbesondere ist der tatsächliche Sperrstom viel zu hoch und leicht spannungsabhängig.
- Der wesentliche Grund ist, daß wir all die Ladungsträger, die in der **RLZ** generiert werden (oder rekombinieren), einfach ignoriert haben.
  - Aber Generation findet auch in der **RLZ** ständig statt. Je nach Überschußenergie und Impulsrichtung wird der irgendwo in der **RLZ** neugeborene Ladungsträger den Berg hinauflaufen oder hinunterfallen – es werden also sowohl Durchlaß- als auch Sperrstromkomponenten in der **RLZ** erzeugt.
  - Das ist genau wie im richtigen Leben: Auch entlang des Abhangs gibt es Kneipen, die **besoffene Radfahrer** *generieren*, die je nach Anfangsschwung und Richtung oben oder unten enden werden, und Radfahrer, die "im Berg" vom Rad fallen, also in der **RLZ** *rekombinieren*.
- Die Berechnung dieser Stromkomponenten gilt i.a. als sehr schwierig; selbst im Rahmen der schon selbst nicht übermäßig einfachen *Shockley-Read-Hall-Theorie* ist einiger Rechenaufwand mit zahlreichen Annahmen und Näherungen notwendig.

- Deswegen wollen wir hier nur zwei Anmerkungen machen:
- **1.** Falls man die Raumladungszone in die Strombilanzen einbezieht, erhält man eine Gleichung für die Kennlinie, die sehr gut stimmt – für alle Halbleiter.
- **2.** Es ist aber gar nicht so schwer, die Teilströme aus der **RLZ** zu berücksichtigen. Qualitativ ist es kein besonderes Problem, und mit ein bißchen intelligentem Raten erhält man sogar sofort die richtigen Gleichungen.

Wir lassen das hier aber sein; die Neugierigen betätigen den Link.

Fragebogen
Schnelle Fragen zu 9.4.3