

Lösungen zur Übung 5.1-1

Illustration

Berechne die mittlere thermische Energie der nachfolgenden Systeme und ziehe Schlussfolgerungen wie angegeben. Über diesen [Link](#) kann man die benötigten Daten finden.

1. Luft bei **300 K**. Es genügt, Stickstoff und Sauerstoff im Verhältnis **80 : 20** zu betrachten; man darf dann auch eine mittlere Masse der Moleküle annehmen.

- Betrachte zunächst nur eine Komponente der Geschwindigkeit, z. B. v_x . Bestimme daraus den Mittelwert von v . Diskutiere den erhaltenen Wert im Lichte bekannter Geschwindigkeiten.

Die Massen sind:

- Sauerstoff **O**: **16** atomare Einheiten (u) = $16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.
- Stickstoff **N**: **14** atomare Einheiten = $14 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2,4 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

- Die Moleküle haben die doppelte Masse; für das Durchschnittsmolekül ergibt sich damit ca. $30 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 5,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

Für Elektrotechniker, [so steht's im Skript](#), reicht die ungefähre Beziehung $U_{\text{therm}} \approx kT$, mit $U_{\text{therm}}(300 \text{ K}) \approx 1/40 \text{ eV}$. Für eine Komponente der Geschwindigkeit haben wir dann $1/3$ der thermischen Energie oder

- $\frac{1}{2}mv_x^2 = 1/120 \text{ eV}$

- $v_x = (1 \text{ eV}/[60 m])^{1/2} = 5,72 \cdot 10^{11}(\text{eV/kg})^{1/2}$

- Die Dimension $(\text{eV/kg})^{1/2}$ ist nicht unbedingt das, was man für Geschwindigkeiten erwartet, aber wir müssen nur die **eV** zu Joule (**J**) konvertieren (der [Link](#) hilft im Zweifel). Wir haben $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ und erhalten damit

- $v_x = 5,72 \cdot 11 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}/\text{kg})^{1/2} = 229 \text{ m/s}$

Für die Gesamtgeschwindigkeit v gilt $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$ da alle drei Geschwindigkeitskomponenten gleich groß sein müssen.

- Damit ist $v = 3^{1/2}v_x = 396 \text{ m/s}$

Na ja - die bekannte Schallgeschwindigkeit in Luft liegt so um **330 m/s**; wir sind mit dem obigen Wert da nicht so weit weg. Rechnet man genauer (mit Zahl der Freiheitsgrade = **5**) bekommt man die Schallgeschwindigkeit auch nicht viel besser raus - Details dazu in diesem [Link](#).

In welcher Größenordnung muss die Belichtungszeit einer (fiktiven) hochauflösenden Kamera sein, damit ein scharfes Bild entsteht? *Hinweis*: Während der Belichtungszeit sollte sich das Teilchen nur um einen Bruchteil seiner Dimension bewegt haben.

Ein Molekül ist etwa **1 nm** groß (es ist hier etwas kleiner). Damit es nicht verschwommen auf dem "Photo" erscheint, darf es sich höchstens um **0,1 nm** bewegen.

- Die maximale Belichtungszeit (gleich mit der richtigen Schallgeschwindigkeit) ist damit $t_{\text{max}} = 0,1 \text{ nm} \cdot \text{s}/330 \text{ m} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Wie weit kommt ein Luftmolekül im Mittel, bevor es mit einem anderen Luftmolekül kollidiert? *Hinweis*: Mittlerer Abstand folgt aus Dichte und Molekülgewicht. Was folgt daraus für die mittlere Zeitdauer zwischen Kollisionen?

Die Dichte von "Luft" ist **1,3 kg/m³**. In **1 m³** sind damit $1,3 \text{ kg}/5,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 2,54 \cdot 10^{25}$ "Luft"- Moleküle enthalten.

- Jedes Molekül hat damit $1/2,55 \cdot 10^{25} \text{ m}^3 = 1/2,55 \cdot 10^{25} \cdot 10^{27} \text{ nm}^3 = 39,3 \text{ nm}^3$ Platz zur Verfügung. Der mittlere Abstand d_{Mol} zum nächsten Molekül ist damit

- $d_{\text{Mol}} = 23 \text{ nm}^{1/3} \text{ nm} = 3,4 \text{ nm}$

- Um diesen Abstand zurückzulegen braucht das Molekül im Mittel die Kollisionszeit

- $t_{\text{Kol}} = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ ms}/330 \text{ m} = 1,03 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

Um das Gewusel der Moleküle in einem Stück Luft zu "sehen", muss man also recht schnell gucken.

Berechne die mittlere thermische Energie der nachfolgenden Systeme und ziehe Schlussfolgerungen wie angegeben. Über diesen [Link](#) kann man die benötigten Daten finden.

2. Wasser bei 300 K.

● Gehe analog zur Luftaufgabe vor.

● Berechne zusätzlich die ungefähre Rotationsgeschwindigkeit des Moleküls. *Hinweis:* Finde die Formel für die Energie eines mit der Kreisfrequenz ω rotierenden kugelförmigen Körpers.

Die Masse eines H_2O Moleküls ist $2 \text{ u} + 16 \text{ u} = 34 \text{ u} = 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Damit kann man wie oben wieder die Geschwindigkeit rechnen. sie kann nicht sehr verschieden sein vom vorherigem Ergebnis.

Um die Rotationsgeschwindigkeit zu bekommen müssen wir etwas genauer hinschauen.

● Die Rotationsenergie E_{rot} einer homogenen Kugel mit Radius r , Masse m und Rotationsgeschwindigkeit ω ist gegeben durch $E_{\text{rot}} = \frac{1}{5} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r^2$, oder $\omega = (5E_{\text{rot}}/mr^2)^{1/2}$.

● Mit $r = 0,3 \text{ nm}$ (typische Atomgröße), thermische Energie in Elektrotechnik Näherung = $kT = 1/40 \text{ eV}$ bei Raumtemperatur und der Masse wie oben geben, erhalten wir $\omega = ((5/40 \text{ eV}) / 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-2})^{1/2}$.

● Wenn wir gleich noch die Umrechnung $\text{eV} - \text{J}$ einsetzen, ergibt sich $\omega = ((5/40 \text{ eV}) / 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-2})^{1/2} \approx 1 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$.

● Das sind recht hohe Drehraten im **THz** Bereich. Wir haben aber nicht sehr genau gerechnet, und für größere und schwerere Moleküle sind die Drehraten entsprechend kleiner - man kommt in den Mikrowellenbereich (**GHz**) und kann dort Molekülspektroskopie treiben!