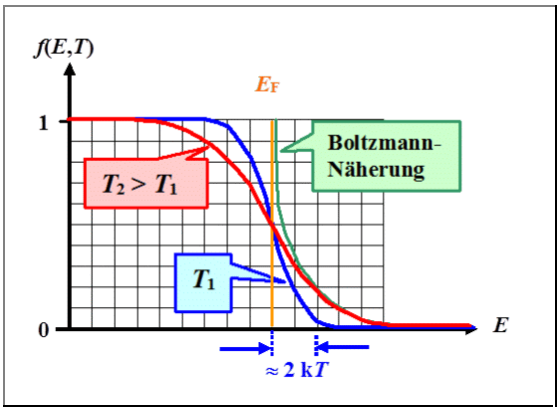
5.3.3 Eigenschaften der Fermi-Verteilung

- Zunächst betrachten wir das Grenzverhalten für $T \to 0$ **K**. Das sollte beim Überschreiten der Fermienergie eine abrupte Stufe von **1** auf **0** ergeben.
  - Wir bekommen in einer Fallunterscheidung:

$$\text{für } E - E_F = \Delta E < 0: \quad f(E, 0K) = \frac{1}{\exp(-\infty) + 1} = 1$$

$$\text{für } E - E_F = \Delta E > 0: \quad f(E, 0K) = \frac{1}{\exp(+\infty) + 1} = 0$$

  - Das ist genau das, was wir brauchen.
- Es ist nun verhältnismäßig einfach, die Fermiverteilung für eine gegebene Temperatur und Fermienergie auszurechnen. Man erhält Kurven wie folgt:



  - Das Rechteck bei $T = 0$ **K** bekommt mit steigender Temperatur zunehmend eine weiche Flanke; genau so, wie wir es uns überlegt hatten.
  - Der "weiche" Bereich oder die "**Aufweichungszone**" hat dabei eine Breite von ungefähr $4\,k_BT$. Auch das entspricht der Vorhersage - aber jetzt können wir es ausrechnen; wir werden das auch in einer Übungsaufgabe tun.
- Eine weitere Eigenschaft wird unmittelbar sichtbar (oder ausrechenbar):

$$f(E = E_F, T) = \frac{1}{2}$$

  - Die Fermienergie liegt per definitionem bei der Energie, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass die Elektronen die Plätze dort besetzen, gleich **1/2** ist. Das ist eine viel bessere, weil allgemeinere **Definition der Fermienergie** , die wir noch oft brauchen werden. Sie ist vollständig kompatibel mit unserer alten Definition, nur besser.
- Wir können weiterhin vermuten, daß der "**Hochenergieschwanz**" der Fermiverteilung, also die Wahrscheinlichkeit, dass Plätze bei $E >> E_F$ besetzt sind, durch die Boltzmannverteilung approximiert werden kann; auch das ist oben eingezeichnet.
  - Das läßt sich leicht zeigen: Für $E - E_F >> k_BT$ gilt in der Tat:

$$f(E, T) \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_BT}\right)$$

  - Das ist die Boltzmannverteilung, nur der Energienullpunkt liegt jetzt bei E_F. Dass diese Beziehung stimmt, wird in der folgenden Übungsaufgabe geprüft.

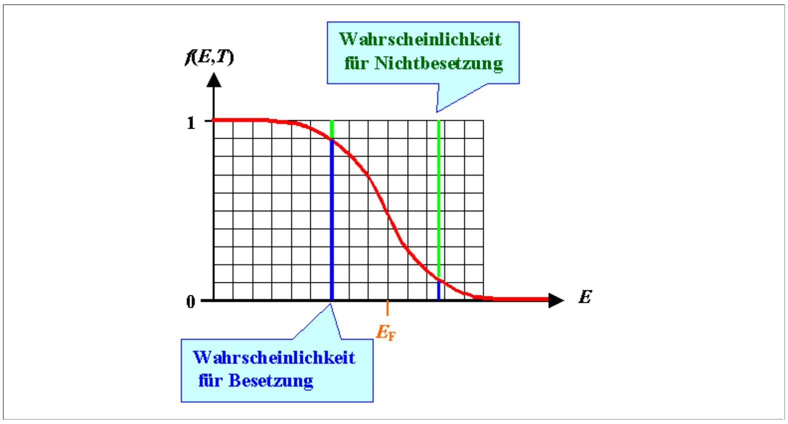
Übung 5.3-1

Eigenschaften der Fermiverteilung

- Zum Schluß noch eine auf den ersten Blick etwas seltsam anmutende Beziehung, die wir aber noch oft brauchen werden:
  - Die Wahrscheinlichkeit w_h dafür, daß ein Platz bei der Energie ***E*** *nicht* mit einem Elektron besetzt ist (wir auf diesem Platz sozusagen ein "*Loch* " [engl. "hole"] haben), ist gegeben durch

$$w_h = 1 - f(E,T)$$

  - Wir schauen uns das noch schnell in einer Graphik an:



- Damit haben wir jetzt ein mächtiges Werkzeug, um den elektronisch bedingten Eigenschaften der Materialien und insbesondere der Halbleiter nachgehen zu können. Denn *elektronische* Eigenschaften kommen von dem, was die *Elektronen* im Kristall so treiben, und die sind nun mal *Fermionen*.
  - Das ist übrigens auch gut so: Falls sie Bosonen wären, hätten wir arge Probleme (die damit anfangen, dass es uns gar nicht geben würde).

- Hier sind die schnellen Fragen:

Fragebogen

Schnelle Fragen zu 5.3.3