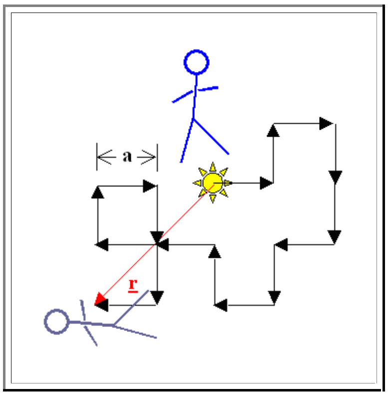
4.2.3 Random Walk und Diffusionslänge

- Ein paradigmatischer Volltrunkener kommt aus einer Kneipe und torkelt durch die Gegend. Jeder Schritt führt mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach vorne oder hinten, nach rechts oder links. In welchem *mittleren Abstand* $\langle |\underline{r}| \rangle$ von der Kneipe finden wir die hilflose Person nach N Schritten der (immer gleichen) Schrittlänge a?



  - Die Art der Fragestellung ist sehr wichtig. Wir können ähnliche, aber in der Bedeutung doch ganz verschiedene Fragen stellen, zum Beispiel:
    - In welchem *mittleren Abstand* $\langle |\underline{r}| \rangle = \langle (x^2 + y^2)^{1/2} \rangle$ finden wir die hilflose Person? (Das ist die Frage von oben.)
    - *Wo*, d.h bei welchem mittleren *Ort* $\langle \underline{r} \rangle$, finden wir im Mittel die hilflosen Personen? (Offenbar bei $\underline{r} = \underline{0}$!)
    - Bei welchem Abstand $|\underline{r}|_{\text{wahr}}$ ist es am *wahrscheinlichsten*, den Trunkenbold zu finden? 1)
  - Sei's drum! Wir interessieren uns hier nur für den *mittleren Abstand*, den wir **Diffusionslänge** L nennen. Offenbar hängt L von der Gesamtzahl N der Schritte ab (im Bild sind es **16**) und von der Schrittweite a.
  - In dem obigen Beispiel betrachten wir einen speziellen Fall des sogenannten **Random Walk**: *Zwei* Dimensionen, *feste* Schrittweite, *4 feste* Winkel.
  - Auf deutsch heißt *Random Walk* "statistische Wanderung" oder **Zufallsbewegung** – aber nur der englische Ausdruck ist wirklich geläufig. Man kann *Random Walk* für jeden Fall und ganz allgemein immer erzeugen, indem man den nächsten Schritt in irgendeine der möglichen Richtungen mit einem geeigneten Würfel auswürfelt. (**1** = vor, **2** = zurück, **3** = ...)

- Wir können das mal experimentell machen. Eine Bewegung sei nur linear möglich (Besoffene in der Mitte eines Tunnels). Statt eines Würfels nehmen wir eine Münze (Kopf = Schritt nach links, Wappen = Schritt nach rechts. Wir lassen auch gleich einen Haufen Besoffene loslaufen (= Punkte), dann ergibt sich sofort die Verteilung der individuellen Abstände und daraus der mittlere Abstand.
  - Wir können dieses einfache Experiment durchführen, indem wir eine Münze werfen und unsere Teilchen bei "Zahl" nach rechts, bei "Kopf" nach links um eine Einheit (unsere Gitterkonstante) bewegen. Das sieht dann beispielsweise so aus:

Link
zum "Random Walk"-Simulator
(leider defekt)

- Spielt man ein bißchen mit dem Simulator oder wirft selbst eine Münze, fällt schnell auf, daß ein Teilchen nach einigen Würfen in der Regel nicht mehr beim Ausgangspunkt ist, obwohl die Wahrscheinlichkeiten für Schritte nach rechts oder nach links genau gleich groß sind.
- Arbeitet man sich durch die Mathematik, erhält man für die *Diffusionslänge* L = mittlerer Abstand nach N Schritten mit (mittlerer) Schrittweite a in ausreichender Näherung:

$$L^2 = N \cdot a^2$$

$$L = a \cdot (N)^{1/2}$$

  - Betrachten wir jetzt nicht mehr Besoffene, sondern Atome oder Leerstellen mit vergleichbarer Intelligenz, ist ihre Schrittweite rund und roh eine Gitterkonstante a, und die Zahl N der Schritte oder Hüpfe ist ihre Sprungrate mal Zeit oder $N = r \cdot t$.
  - Die Sprungrate wiederum steckt im Diffusionskoeffizienten des diffundierenden Teilchens. Setzt man alles zusammen, erhält man eine sehr wichtige und sehr simple Beziehung zwischen der Diffusionslänge eines Teilchens (wie weit kommt es im Mittel?) und seiner **Lebensdauer** τ = verfügbare Zeit zum Rumrennen in der Form

$$L \approx (D \cdot \tau)^{1/2}$$

- Diese Formel wollen wir uns gut merken! Wir haben, allgemein gesprochen, eine Formel erhalten, die uns das Ergebnis eines statistischen Prozesses an die Zeitdauer koppelt, für die der Prozess läuft.
  - Das gilt für **jeden** solchen Vorgang, also auch für alle Diffusionsphämomene. Ob Leerstellen in einem Kristall wandern, Tintenmoleküle in Wasser, *Elektronen im Halbleiter* – was auch immer; solange es mit "Random Walk" geschieht, gelten die obigen Beziehungen.
  - Ausblick: In allen Formeln zu Halbleiterbauelementen steckt die Diffusionslänge $L = (D\tau)^{1/2}$ der Ladungsträger, die mit der Lebensdauer τ dieser Ladungsträger und ihrem Diffusionskoeffizienten D durch unsere Random-Walk-Formel verknüpft ist. Zahlenwerte für L und τ (der Wert von D folgt dann aus der Formel) sind deshalb sehr wichtige Kenngrößen für Halbleitermaterialien!
- Am Rande sei noch bemerkt, dass wir das Ergebnis natürlich auch über die Fickschen Gleichungen (plus atomare Deutung des Diffusionskoeffizienten) erhalten können.
  - Wir lösen ein passendes Diffusionsproblem (es wird uns eine Gaußverteilung geben) und errechnen aus der Lösung den mittleren Abstand. Das ist aber mathematisch ziemlich anspruchsvoll.

Fragebogen
Schelle Fragen zu 4.2.3

---

1) Dass ein Mittelwert nicht gleichzeitig der wahrscheinlichste Wert sein muß, wird sofort an folgendem Beispiel klar. Im Einkaufszentrum tummeln sich **1000** Personen, von denen **990** über ein Einkommen von **€ 2.000,–** verfügen, während **10** Personen ein Einkommen von **€ 2.000.000,–** haben. Das *mittlere* Einkommen (**= € 21.980,–**) ist dann ganz bestimmt nicht das *wahrscheinlichste* Einkommen.