

5.2.4 Massenwirkungsgesetz und Ladungsträgerdichten

Massenwirkungsgesetz

Die beiden relevanten Ladungsträgerdichten sind die Konzentration der Elektronen im Leitungsband n_L und die Konzentration der Löcher n_V im Valenzband. Sie sind immer gegeben durch

$$n_L = N_{\text{eff}}^L \cdot \exp - \frac{E_L - E_F}{kT} \quad n_V = N_{\text{eff}}^V \cdot \exp - \frac{E_F - E_V}{kT}$$

Dotierung oder Defekte ändern "nur" die Fermienergie E_F ; aus dem vorhergehenden [Unterkapitel](#) wissen wir auch wie.

Wenn wir nun das Produkt aus n_L und n_V bilden, erhalten wir folgende Formel

$$n_L \cdot n_V = N_{\text{eff}}^L \cdot N_{\text{eff}}^V \cdot \exp - \frac{(E_L - E_F) + (E_F - E_V)}{kT} = N_{\text{eff}}^L \cdot N_{\text{eff}}^V \cdot \exp - \frac{E_L - E_V}{kT} = n_i^2$$

Diese Beziehung heißt *Massenwirkungsgesetz* für Elektronen und Löcher; ist sehr wichtig, und muß diskutiert werden!

Zunächst müssen wir uns klar machen, wieso hier n_i^2 auftaucht, das Quadrat der [intrinsischen Ladungsträgerdichte](#). Aber das ist leicht zu sehen:

Die Formel gilt *immer*, d.h. auch für $n_L = n_V = n_i$.

Ganz nebenbei erhalten wir damit auch eine sehr brauchbare Formel für den Fall, daß E_F für einen intrinsischen Halbleiter nicht genau in der Bandmitte liegt (weil die N_{eff} [verschieden](#) sind). Wir schreiben einfach:

$$n_i = (n_i^2)^{1/2} = \left(N_{\text{eff}}^L \cdot N_{\text{eff}}^V \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{E_L - E_V}{2kT}$$

Das ist sehr viel einfacher, als die korrekte Fermienergie auszurechnen und einzusetzen - obwohl [wir das könnten](#).

Jetzt fragen wir uns natürlich warum das ganze *Massenwirkungsgesetz* heißt; welche Massen wirken hier wie?

Keine. Es heißt halt so, weil die Bezeichnung aus dem in der Chemie unverbrüchlich verankerten [Massenwirkungsgesetz für chemische Reaktionen](#) kommt (und dort gibt die Bezeichnung auch einen gewissen Sinn).

Formal kann man aber auch die Abgabe oder Aufnahme von Elektronen als "chemischen Reaktion" zwischen Dotieratomen, Elektronen und Löchern schreiben. Wenn man dann diese "chemischen" Reaktionsgleichungen hinschreibt (und vorher die Symbolik in nicht ganz einfacher Art und Weise erweitert auf Dinge, die nicht Atome sind), kann man tatsächlich die Beziehung $n_L \cdot n_V = n_i^2$ direkt ableiten. Wer's nicht glaubt betätigt [den Link](#).

Wir knirschen einmal leise mit den Zähnen und akzeptieren dann, daß die obige Gleichung auch in der Halbleitertechnik *überall* auf der Welt eben als *Massenwirkungsgesetz* (engl. "Mass action law") bekannt ist.

Mit dem *Massenwirkungsgesetz für Löcher und Elektronen* haben wir eine ungeheuer wichtige Beziehung! Sie sagt nämlich klar und deutlich, daß wenn man die Konzentration *einer* Ladungsträgersorte kennt *und* noch den Halbleiter mit dem man arbeitet (das bestimmt n_i), dann kennt man auch die Konzentration der anderen Sorte.

Und zwar *exakt!* Es stecken hier keine neuen Näherungen drin.

Näherungsformeln für die Ladungsträgerdichte mit Dotierung

Die einfachste Näherung haben wir indirekt schon gemacht. Wir setzen die Fermienergie zwischen Leitungs- oder Valenzbandbandkante und Dotierniveau. Dann erhalten wir in einer sehr simplen Näherung für *tiefe* Temperaturen

$$n_{L,V} (\text{kleine } T) = N_{\text{Dot}} \cdot \exp - \frac{\Delta E}{2kT}$$

- Dies gilt aber nur halbwegs exakt, solange die Fermienergie noch zwischen Dotierniveau und Bandkante liegt, also maximal die Hälfte der Dotieratome ionisiert ist (*warum wohl???*).

Eine etwas bessere Näherung berücksichtigt, daß die Fermienergie genauso wenig wie im intrinsischen Fall in der *Mitte* zwischen Dotierniveau und Bandkante liegt, falls die beiden Zustandsdichten N_{Dot} und N_{eff} verschieden sind. Das kann man exakt wie [im oben dargestellten](#) intrinsischen Fall berücksichtigen.

- Wir müssen uns dazu nur klarmachen, daß für *tiefe* Temperaturen das Dotierniveau entweder die Rolle des Valenzbandes übernimmt (bei Donatoren, denn von dort, und nur von dort kommen die Elektronen ins Leitungsband) oder die Rolle des Leitungsbandes bei Akzeptoren.
- Wir müssen in der Formel für die intrinsische Ladungsträgerkonzentration also nur die jeweilige effektive Dichte durch die Dotierkonzentration ersetzen, und statt $E_G/2$ im Exponenten $\Delta E/2$ nehmen um eine Tieftemperaturnäherung für den dotierten Fall zu erhalten. Das Ergebnis ist

$$n_{L,V}(\text{kleine } T) = \left(N_{\text{eff}}^V \cdot N_{\text{Dot}} \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{\Delta E}{2kT}$$

Ebenfalls einfach ist es, eine Näherung für *hohe* Temperaturen zu finden, bei denen $n_L \gg n_D$ gilt. Dann sind wir wieder mehr oder weniger intrinsisch und haben

$$n_L(\text{große } T) \approx n_i = \left(N_{\text{eff}}^L \cdot N_{\text{eff}}^V \right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{E_L - E_V}{2kT}$$

Es bleiben die *"mittleren"* Temperaturen. Die Definition von "mittlerer Temperatur" ist, daß wir zwar immer noch das Valenzband vernachlässigen können, d.h. wir nehmen an, daß die weitaus überwiegende Anzahl der Elektronen im Leitungsband von den Donatoren kommt, aber daß die Fermienergie jetzt auch unterhalb oder oberhalb des Dotierniveaus liegen kann, d.h. daß mehr als die Hälfte der Dotieratome ionisiert ist

- Klar? Das ist die Umkehrung der [Frage von oben](#). Wer nach kurzem Nachdenken nicht selbst darauf kommt, warum die Fermienergie unterhalb des Donatorniveaus bzw. oberhalb des Akzeptorniveaus liegen muß, falls mehr als 50% der Dotieratome ein Elektron abgegeben bzw. aufgenommen haben, der betätigt (beschämt) den [Link](#).
- Das ist einerseits der schwierigste, andererseits der einfachste Fall. Beginnen wir mit dem schwierigen Teil.

Wir betrachten nur Donatoren (für Akzeptoren ist alles symmetrisch) und gehen immer davon aus, daß alle Elektronen im Leitungsband von den Donatoren kommen, d.h. die Dichte der Elektronen im Leitungsband ist identisch zur Dichte der nicht mit Elektronen besetzten Donatorzustände. Wir haben

$$n_L(\text{mittlere } T) = N_D \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(E_D - E_F)/kT} \right)$$

- Leider fehlt die Fermienergie um weiterzukommen. Aber wir haben ja *immer* noch eine weitere Gleichung für die Ladungsträgerdichte im Leitungsband!

$$n_L(\text{alle } T) = N_{\text{eff}}^L \cdot B(E_L, E_F, T) \approx N_{\text{eff}}^L \cdot \exp - \frac{E_L - E_F}{kT}$$

- Das gilt schließlich *immer*, vorausgesetzt wir können die Boltzmannnäherung gebrauchen! Das ist aber im Leitungsband zumindest eher möglich als bei den Donatorniveaus, da wir uns auf jedem Fall eher im ["Hochenergieschwanz"](#) der Fermiverteilung befinden.
- Daraus können wir $\exp(E_F/kT)$ destillieren und weiter oben einsetzen. Wir haben

$$\exp \frac{E_F}{kT} = \frac{n_L}{N_{\text{eff}}^L} \cdot \exp \frac{E_L}{kT}$$

- Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt nach der üblichen [etwas zähen Rechnung](#) mit den Exponentialfunktionen

$$n_L (\text{mittlere } T) = \frac{2N_D}{1 + \left(1 + \frac{4 \cdot N_D}{N_{\text{eff}}^L} \cdot \exp \frac{E_L - E_d}{kT} \right)^{1/2}}$$

Das ist eine ziemlich gute Formel, die immer gilt - auch bei kleinen Temperaturen - solange kein nennenswerter Beitrag zur Elektronendichte vom Valenzband kommt. Ihr asymptotisches Verhalten ist leicht zu sehen:

- Wir unterscheiden die Fälle
 "Kleine" Temperaturen, d.h. $E_L - E_d \gg kT \Rightarrow \exp(E_L - E_d)/kT \gg 1$
 "Mittlere" Temperaturen, d.h. $E_L - E_d \ll kT \ll (E_L - E_V)/2 \Rightarrow \exp(E_L - E_d)/kT \Rightarrow 0$
- Damit erhalten wir

Kleine Temperaturen	$n_L (\text{kleine } T) = (N_D \cdot N_{\text{eff}}^L)^{1/2} \cdot \exp - \frac{E_L - E_d}{2kT}$
Mittlere Temperaturen	$n_L (\text{mittlere } T) = N_D$

Wir erhalten also für kleine Temperaturen dasselbe Ergebnis wie zuvor, und für *mittlere Temperaturen* eine ungeheuer wichtige, weil so einfache Näherung:

$$n_L (\text{mittlere } T) \approx N_D$$

$$n_V (\text{mittlere } T) \approx N_A$$

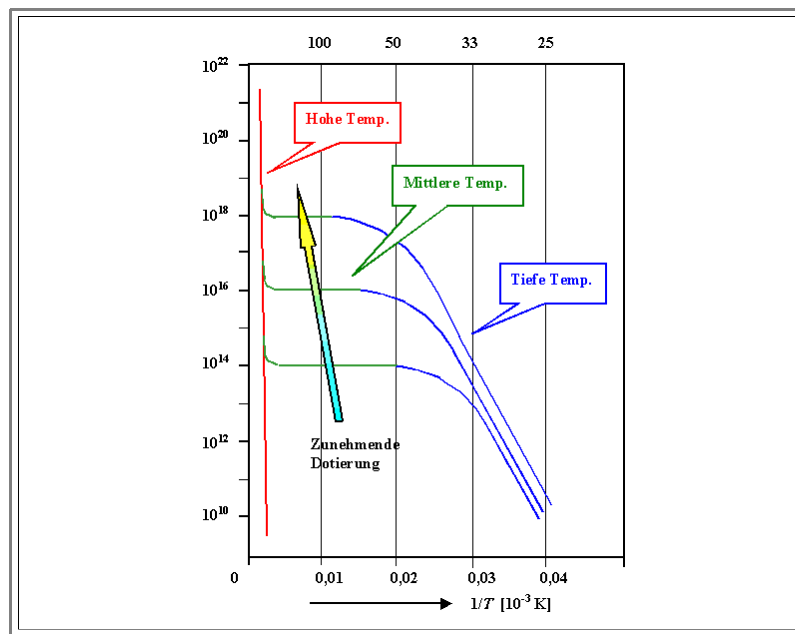
- Dabei ist definiert, was "mittlere" Temperaturen bedeutet: T ist unterhalb des massiven Einsatzes der intrinsischen Leitfähigkeit, aber so hoch, daß praktisch alle Dotieratome ionisiert sind.
- Für **Si** ist diese mittlere Temperatur so ungefähr Raumtemperatur (290 K) \pm 100 K. *Das ist toll!*
- Denn damit können wir die Leitfähigkeit von **Si** im interessierenden Temperaturbereich durch Dotierung *einstellen und* ziemlich temperaturunabhängig halten.
- Und das sind schlicht und einfach die absoluten Grundvoraussetzungen jeder Halbleitertechnologie.*

Bei anderen Halbleitern können wir bereits hier in Probleme laufen.

- Germanium**, z.B. hat eine kleinere Bandlücke als **Si** und wird schon bei niedrigen Temperaturen intrinsisch, d.h. zu leitfähig. Obwohl der Beginn der Halbleitertechnik noch von **Ge** dominiert war (im wesentlichen die 60er Jahre des 20. Jahrhunderts), hat sich **Si**, obwohl viel schwieriger herzustellen, doch bald durchgesetzt.
- Bei **Diamant**, im anderen Extrem, ist die Bandlücke sehr groß; es ist undotiert ein guter Isolator. Leider sind brauchbare Dotierniveaus soweit von den Bandkanten entfernt, daß wir bei Raumtemperatur noch im Tieftemperaturbereich liegen, und die Dotierung nicht richtig wirksam wird. das gilt im großen Ganzen auch für alle anderen Isolatoren.

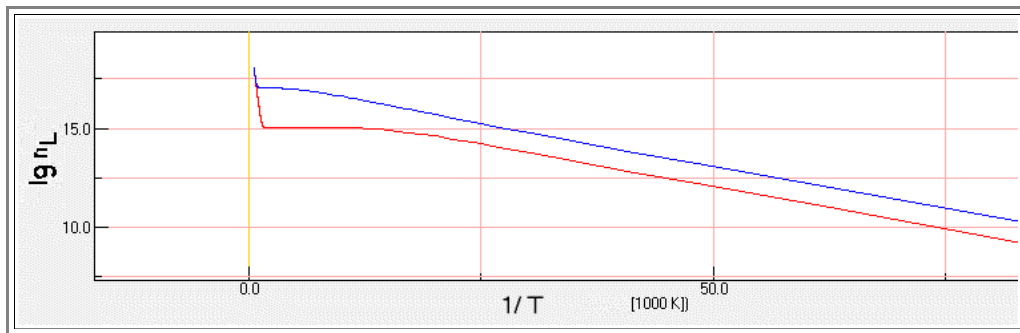
Es gibt noch mehr Näherungsformeln für die Ladungsträgerdichten in dotierten Halbleitern (darunter auch ziemlich falsche).

- Hier schauen wir uns abschließend nur die prinzipielle Darstellung an; wobei die Zahlenwerte nur der Groborientierung dienen. [Im Link](#) sind einige graphische Darstellungen mit Erläuterungen zu besichtigen.



Das ist genau das, was der [JAVA-Modul](#) uns auch ausrechnet - nur daß dort an den Achsen Zahlen stehen.

Hier ist ein Beispiel für Dichten von $N_D = (10^{15} \text{ bzw. } 10^{17}) \text{ cm}^{-3}$ in Si:



Damit können wir uns dem wirklich wichtigen Parameter zuwenden, der *spezifischen Leitfähigkeit*.

Fragebogen / Questionnaire

Multiple Choice Fragen zu 5.2.4