Energie und Impuls bei Teilchen und Quasiteilchen

Advanced

Wellenvektoren, Frequenzen und Dispersionsrelationen

- Wir haben mehrfach direkt oder indirekt gelernt, dass für alle (freien) Teilchen oder Quasiteilchen, die dann immer durch eine ebene Welle mit Wellenvektor $\underline{k} = 2\omega/\lambda$ und einer Kreisfrequenz ω beschreibbar sind, in der Quantentheorie für Gesamtenergie E und Impuls p sehr einfache Gleichungen gelten:

$$E = \hbar \cdot \omega$$

$$p = \hbar \cdot \underline{k}$$

  - Heißt das, dass alle Teilchem mit demselben Wellenvektor auch dieselbe Energie haben? *Nein* - heißt es nicht, denn die Beziehung zwischen ω und $\underline{k}$ ist die **Dispersionsrelation**, und die kann für verschiedene Teilchen sehr verschieden sein.
- Schauen wir uns das mal konkret an - für unsere Teilchen *Elektron* und *Photon*, sowie für das Quasiteilchen *Phonon*.
  - Was wissen wir über die Wellenvektoren, Frequenzen und Dispersionsrelationen für dieses Dreigestirn? Eine ganze Menge, aber wir haben das nie so ganz systematisch dargestellt. Schaun' mer mal; aber nur ganz grob - wir betrachten ausschließlich Größenordnungen.
- **Photonen**. Wir interessieren uns hier nur für Infrarot (**IR**) - Ultraviolett (**UV**), also das Spektrum rund ums sichtbare Licht. Wir haben folgende Eigenschaften:
  - **Wellenlängen** von Licht, wie oben definiert, *weiß man einfach*. Sie liegen so um **5 µm - 0.1 µm**. Damit haben wir Wellenvektoren im Bereich $(10^6 - 5 \cdot 10^7)\ \mathrm{m}^{-1}$.
  - **Frequenzen** weiß man nicht einfach, man kann aber nachschauen, oder sie mit der nachfolgenden Gleichung berechnen. Wir haben jedenfalls $\omega \approx (4 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{16})\ \mathrm{s}^{-1}$.
  - Die Dispersionsrelation des Lichtes kennen wir vielleicht nicht unter diesem Namen, aber was wir kennen *müssen* ist die elementare Beziehung

$$c = \nu \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k}$$

  - Dabei ist **c** natürlich die Lichtgeschindigkeit, also im Vakuum ca. $3 \cdot 10^8$ **m/s** - das weiß man. Und - hey- wir haben hier ja schon eine Dispersionsrelation, eine Beziehung zwischen ω und k für elektromagnetische Wellen (im Vakuum).
- Die **freien Elektronen** des Kristalls tummeln sich alle in den ersten Brillouinzonen. Damit wissen wir:
  - Die **Wellenvektoren** liegen maximal so um (einige) π/a; Mit einer Gitterkonstanten a so um **0.3 nm** (*weiß man*), haben die energiereichen Elektronen Wellenvektoren so um $k = 10^{10}\ \mathrm{m}^{-1}$, und damit Wellenlängen im **nm** Bereich.
  - Selbstverständlich kann man im Rahmen des freien Elektronengasmodells auch kleine k's bis $k = 0$ haben, aber diese Elektronen sind verhältnismäßig uninteressant.
  - Die **Dispersionsrelation** - diesmal für die Energie - kennen wir, sie lautet

$$E_k = \hbar \cdot \omega_k = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m_e}$$

  - Daraus können wir die **Frequenzen** berechnen und erhalten

$$\omega_k = \frac{\hbar \cdot k^2}{2m_e} \approx \frac{10^{-34} \cdot 10^{20}\ \mathrm{J \cdot s}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg \cdot m^2}} \approx 5 \cdot 10^{15} \frac{\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s}}{\mathrm{s^2 \cdot kg \cdot m^2}} \approx 5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

  - Wie der Zufall (*???*) so spielt, ist das dieselbe Größenordnung wie bei den Photonen.
- Bleiben noch die **Phononen**. Hier wissen wir gar nichts, es sei denn wir haben den entsprechenden Fortgeschrittenen Modul gelesen. Falls nicht, tun wir das jetzt. Dann können wir folgende Angaben machen:

- **Wellenvektor**: Ist ähnlich wie bei den Elektronen maximal π/a, d.h. er liegt in der ersten Brillouinzone.
- **Frequenz**: Maximal ca. $\mathbf{10^{13}}$ **Hz**; die Kreisfrequenz kann dann $\mathbf{10^{14}}$ **Hz** sein.
- Die Dispersionsrelation für den den einfachst möglichen Fall (nur ein Atom in der Basis) lautet (und das muss man hier einfach glauben):

$$\omega = \left(\frac{2Y \cdot a}{m_a}\left(1 - \cos(ka)\right)\right)^{1/2}$$

- Dabei ist Y der Elastizitätsmodul und m_a die Masse des Atoms.

Energie und Impuls

- Mit den obigen Zahlen können wir jetzt die Größenordnungen für Energie und Impuls unserer drei Teilchen berechen.
  - Dazu legen wir eine Tabelle an

	Photon	Elektron	Phonon
Wellenvektor k	10^7 m^{-1}	10^{10} m^{-1}	10^{10} m^{-1}
Frequenz ω	$4 \cdot 10^{15}$ Hz	$4 \cdot 10^{15}$ Hz	10^{14} Hz
Energie $E = \hbar \cdot \omega$	2.4 eV	2.4 eV	0.06 eV
Impuls $p = \hbar \cdot k$	$10^7 \cdot \hbar \cdot$ m^{-1}	$10^{10} \cdot \hbar \cdot$ m^{-1}	$10^{10} \cdot \hbar \cdot$ m^{-1}
$\hbar \approx 6 \cdot 10^{-16}$ eV/s			

- Was lernen wir daraus? Etwas sehr wichtiges: Salopp ausgedrückt gilt:
  - *Photonen* haben Energie, aber kaum Impuls.
  - *Phononen* haben Impuls, aber kaum Energie.
  - *Elektronen* haben Impuls *und* Energie.
- Daraus folgt sofort:
  - Bei einer Wechselwirkung von nur zwei der drei Teilchen, kann der Impuls- und Energieerhaltungssatz i.a. *nicht* erfüllt werden.
  - Deshalb sind z.B. bei der Interaktion von Licht (= Photonen) mit einem Kristall (= freie Elektronen) fast immer auch Phononen beteiligt.