2.5. Eigenschaften von Wellen und Teilchen

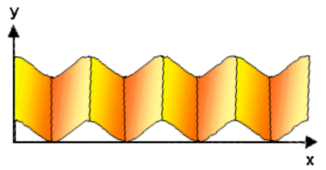
2.5.1 Mathematische Beschreibung

Generelle Beschreibung von Schwingungen und Wellen

- Mit dem Ausdruck "Eine **Welle** " beschreibt man *Schwingungs*vorgänge im Raum *und* in der Zeit.
  - Schauen wir uns zunächst den Begriff **Schwingung** näher an. Eine "Schwingung" *allgemeiner* Art nur im *Raum* liegt immer vor, wenn sich irgendeine Eigenschaft periodisch im Raum ändert. Das kann die Farbe beim Zebrastreifen sein, es kann aber auch z.B. das periodische Potential ***U(x)*** eines Kristalls sein.
  - Die Grundeigenschaften einer Schwingung sind in einem extra Modul dargestellt.
  - In allgemeinster Form können wir jeden periodischen Vorgang als Fourierreihe beschreiben und erhalten z.B. für ein periodisches Potential ***U(x)***

$$U(x) = U_1 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot x}{a} + U_2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 2x}{a} + U_3 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 3x}{a} + \ldots$$

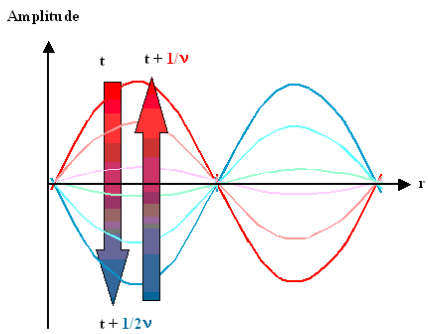
  - Mit ***a*** **=** Gitterkonstante = **Wellenlänge** der "**Grundfrequenz**".
- Ganz allgemein bezeichnen *wir* als Schwingung alles, das wie im Beispiel oben nur den *Ort* als Variable sowie eine *Wellenlänge* als Parameter enthält, auch wenn das nicht dem allgemeinen Sprachgebrauch entspricht (niemand redet im täglichen Leben von der Geländerstangenschwingung oder von Zebraschwingungen bei Fußgängerüberwegen).
  - Hier zwei Beispiele:



  - Links die langweilige symbolische Darstellung einer Sinusschwingung; rechts eine sehr hübsche Schwingung, für die man schon eine sehr komplizierte zweidimensionale Fourierdarstellung braucht (wir würden dazu natürlich unseren alten Trick benutzen und diese Schwingung unendlich ausgedehnt machen, indem wir sie periodisch für beide Richtungen ins Unendliche fortsetzen).
- Statt dem Ort als Variable können wir aber auch *nur* die Zeit nehmen (Ort *und* Zeit kombinieren wir dann als nächstes).
  - Eine *Schwingung* nur in der *Zeit* liegt beispielsweise vor, wenn wir die Amplitude ***A*** einer stehenden (mechanischen, elektromagnetischen, quantenmechanischen oder ...) "Welle" am Punkt ***r*** messen. Wir haben in der Fourierreihendarstellung.

$$A_r(t) = A_{r,0} \cdot \sin \omega \cdot t + A_{r,1} \cdot \sin 2\omega t + ..$$

  - Aussehen kann das so:



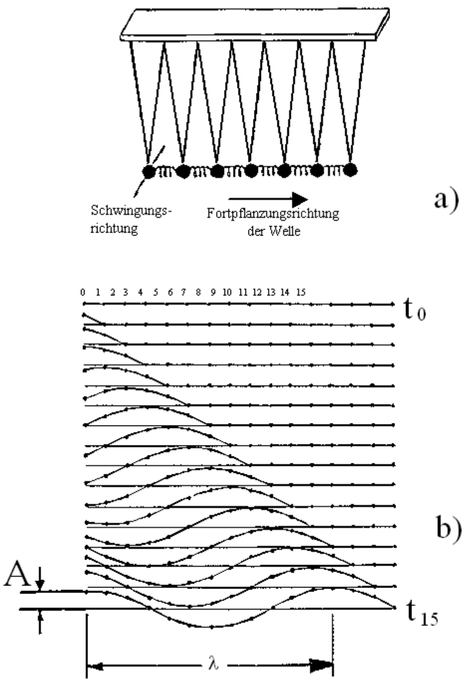
- Wir haben eine **stehende Welle** (eigentlich müßten wir "stehende Schwingung" sagen), wie man sie z.B bekommt wenn man ein dickes Seil an der Wand festmacht und dann kräftig "schüttelt").

- Außer der im Raum definierten Wellenlänge, haben wir jetzt auch noch eine Frequenz ν zu berücksichtigen, definiert als der Kehrwert der Zeit die vergeht bis eine Periode durchgeführt ist, d.h. eine beliebige Ausgangsposition wieder erreicht ist.
- Es ist gut, sich hier klar zu machen, daß Wellenlänge und Frequenz in diesem Beispiel *vollkommen unabhängig wählbar sind*, sie sind durch keine *allgemeine* Beziehung gekoppelt. Für eine konkrete physikalische Anwendung kann es natürlich eine Beziehung zwischen Wellenlänge und Frequenz geben, das ist dann die **Dispersionsfunktion** des jeweiligen Systems.

Eine **Welle** kombiniert im allgemeinen Raum *und* Zeit. Allerdings unterscheidet niemand, auch nicht Wissenschaftler, immer sklavisch "Schwingungen" und "Wellen" in voller Strenge - wir haben das gerade eben auch nicht getan und von stehenden Wellen geredet.

- Bei einer "richtigen" Welle gibt es also sowohl periodische zeitliche Änderungen von was auch immer an einem festen Punkt im Raum, als auch bei einem gegebenen Zeitpunkt periodische Änderungen entlang einer Richtung im Raum.
- Das hört sich kompliziert an, aber jeder weiß was gemeint ist - denn jeder hat schon genügend **laufende Wellen** gesehen. Und wenn wir Wellen sagen, meinen wir im allgemeinen *laufende* Wellen, im Gegensatz zu den in der Zeit oder im Raum stationären **Schwingungen** oder auch *stehenden* Wellen.
- Aber wie gesagt: So ganz sauber wird selten unterschieden; Schwingungen sind der Grenzfall von Wellen, und meistens weiß man aus dem Kontext oder aus der Formel eh' was gemeint ist.

Die Entstehung einer Welle verdeutlicht man (und frau) sich am besten bei der Betrachtung von Wellen im Ozean, von Schallwellen (die aber nicht so ganz gut zu sehen sind, wohl aber zu hören) oder aber im schon stark abstrahierten (dafür aber sehr einfachen) Fall von gekoppelten Pendeln



Oben (a): System von gekoppelten Pendeln. Das erste Pendel wird in die gezeigte Richtung ausgelenkt, die Welle pflanzt sich senkrecht zur Auslenkungsrichtung fort (Transversalwelle).

Unten (b): *Momentaufnahmen* zu verschiedenen Zeiten ($t_0 < t_{15}$) des Pendelsystems. Die räumliche Periode der Welle ist λ , ihre Amplitude ist ***A***.

Einfache Wellen, i.d.R. solche mit kleinen Auslenkungen oder Amplituden, lassen sich oft durch *eine* Sinus-Funktion beschreiben. Die Auslenkung ψ als Funktion von Ort und Zeit lautet dann in der mathematisch einfachst möglichen Darstellung

$$\psi(x, t) \;=\; A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \nu \cdot t\right)\right)$$

Die Gleichung enthält die *drei* Bestimmungsstücke einer Welle:

- Die **Amplitude *A***.

- Die **Wellenlänge** λ .
- Die **Frequenz** ν oder die **Periodendauer** $T = 1/\nu$.
- Das Argument der Sinusfunktion ist die **Phase** der Welle. Man erkennt an der Phase, daß sich die Amplitude der Welle bei einer festen Zeit t mit der *Wellenlänge* λ wiederholt. Die *Frequenz* der Welle ist die *reziproke Zeit*, die von der Welle benötigt wird, um sich um eine Wellenlänge fortzupflanzen.

Es ist sehr wichtig sich klar zu machen, dass bei dieser einfachst möglichen Sinuswelle die Wellenlänge und die Frequenz nicht mehr *unabhängige* Größen sind. Es gibt eine Beziehung zwischen diesen Parametern, die (notwendigerweise) noch eine **4.** Kenngröße der Welle, nämlich ihre **Ausbreitungsgeschwindigkeit** (Besser **Phasengeschwindigkeit**) **v** enthält.

Dies Beziehung ist leicht herzuleiten: In der Periodendauer $T = 1/\nu$ hat sich die Welle offenbar genau um eine Wellenlänge λ fortgepflanzt.

- Damit definiert sich die *Phasengeschwindigkeit* **v** der Welle als

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{T} = \nu \cdot \lambda$$

- *Phasengeschwindigkeit* deswegen, weil es ja nur die Phase ist, die "läuft". Die Welle selbst hat in unserer mathematischen Idealisierung kein Anfang und kein Ende - sie ist überall schon da. Das einzige was sich "bewegt", ist die Phase.
- Man denke an eine Welle auf dem Meer, die in Richtung Strand auf einen zuläuft: Es sind nicht die Wasser"teilchen" die laufen, auch wenn das so aussieht, es ist die Phase der Welle. Die Wasserteilchen bleiben in Laufrichtung ortsfest, sie bewegen sich nur auf und ab (außer bei Tsunamis!).

Für elektromagnetische Wellen im Vakuum haben wir natürlich (???) **v = c =** Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

- Für andere Wellensorten muß die Ausbreitungsgeschwindigkeit aber aus unabhängigen Größen ermittelt werden. Die Schallgeschwindigkeit ist beispielsweise keine Naturkonstante oder sonstwie "gegeben", sondern eine spezifische Eigenschaft des betrachteten Mediums, die sich aus der Wechselwirkung der Atome oder Moleküle ergibt (bei Festkörpern also mal wieder aus den Bindungen). Bei gleicher Frequenz laufen Schallwellen deshalb verschieden schnell durch verschiedene Materialien.

Anstelle der Frequenz ν wird aus schreibtechnischen Gründen häufig die *Kreisfrequenz* ω verwendet; es gilt

$$\omega := 2\pi\nu$$

So wie man statt der Periodendauer T auch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ verwenden kann, nimmt man statt der Wellenlänge auch gerne den **Wellenvektor** $\underline{k}$, definiert durch

$$|\underline{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Der Wellen*vektor* $\underline{k}$ wird spätestens bei zweidimensionalen Problemen benutzt, da er zusätzlich zur Wellenlänge λ auch noch die *Ausbreitungsrichtung* der Welle angibt (die Richtung des Wellenvektors liegt in der jeweilige Ausbreitungsrichtung).
- Damit schreibt sich die Gleichung einer eindimensionalen Welle in x-Richtung.

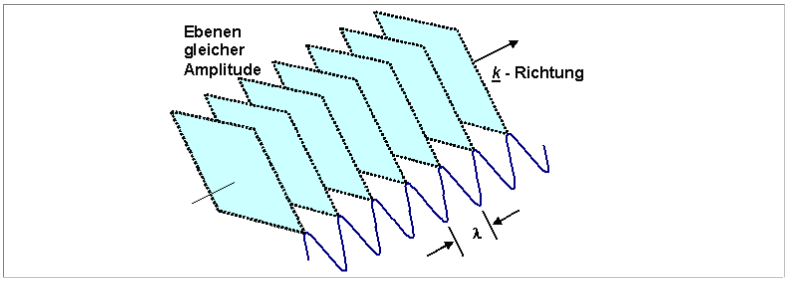
$$\psi(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Der Übergang zu *drei* Dimensionen, in denen sich dann "unsere" Welle in irgendeine räumliche Richtung fortbewegt (und noch ganz andere Wellen möglich werden) ist jetzt einfach:

- Wir verwenden *Vektoren*, ersetzen x durch den Ortsvektor $\underline{r} = (x, y, z)$ und k durch $\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$, und erhalten

$$\psi(\underline{r}, t) = A \cdot \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega \cdot t)$$

Die mit dieser Formel beschriebene Welle heißt auch **laufende ebene Welle** oder kurz **ebene Welle**; siehe unten.



Räumliche Darstellung einer ebenen Welle. Die Wellenfront pflanzt sich überall in gleicher Weise senkrecht zum Wellenvektor fort.

- *Ebene Wellen* dieser Art haben einige wichtige allgemeine Eigenschaften:
  - Entlang einer **Wellenfront**, die per definitionem senkrecht zum $\underline{k}$-Vektor verläuft und unendlich ausgedehnt ist, herrscht *immer* die gleiche Amplitude, da auf der Ebene der Wellenfront das Skalarprodukt $\underline{k} \cdot \underline{r}$ konstant ist. Wer das nicht sofort nachvollziehen kann, sollte sich den Modul über Vektorrechnung genau ansehen.
  - Eine *mathematische* ebene Welle hat keinen Anfang und kein Ende - weder in der Zeit noch im Raum. Sie kann damit immer nur eine *Näherung* an eine reale Welle sein.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $\mathbf{v} = \nu \cdot \lambda$, wie oben schon festgehalten - aber das gilt *nur* für simple ebene einfache "Sinus"wellen. Es gilt im Allgemeinen *nicht* mehr für die *Überlagerungen* mehrerer Wellen.
  - Das kann man am besten einsehen, wenn man sich zwei ebene Wellen vorstellt, die sich nur im Vorzeichen der Ausbreitungsrichtung unterscheiden und dann überlagern.
  - Das Ergebnis ist eine **stehende Welle**, mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von Null - obwohl die beiden Teilwellen für sich mit jeder beliebigen Geschwindigkeit laufen können!
- Aber auch für einfache ebene Wellen muß die Ausbreitungsgeschwindigkeit keinewegs eine *Konstante* sein. Für elektromagnetische Wellen ist $\boldsymbol{c}$ zwar die Lichtgeschwindigkeit, aber die ist *nur* im Vakuum eine absolute Konstante. Im allgemeinen kann **v** von der Wellenlänge bzw. Frequenz abhängen.
  - Der funktionale Zusammenhang zwischen λ und ν für eine einfache Sinuswelle, d.h. die Funktion $\nu(\lambda)$ heißt **Dispersionsrelation**. Die Bestimmung der Dispersionsrelation für die interessierenden Wellen in einem *Material* ist immer das erste Ziel einer Theorie.
  - Man kann statt der Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge genausogut die Beziehungen zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor, oder Energie (proportional zur Kreisfrequenz) und Wellenvektor, oder ... nehmen. Großzügig nennen wir die jeweilige Beziehung immer *Dispersionsrelation*.
- Eine mathematisch elegantere Darstellung einer ebenen Welle benutzt die komplexen Zahlen; wir erhalten durch Verwendung der Eulerschen Beziehung die Darstellung

$$\psi(\underline{r}, t) = A \cdot \exp[\mathrm{i} \cdot (\underline{k} \cdot \underline{r} + \omega \cdot t)] = A \cdot \exp[\mathrm{i} \cdot \underline{k} \cdot \underline{r}] \cdot \exp[\mathrm{i} \cdot \omega \cdot t]$$

  - Dabei wird in der klassischen Physik bzw. in der Elektrotechnik stillschweigend vereinbart, daß immer *nur* der der **Real**- bzw. der **Imaginärteil** die real meßbare Situation beschreibt.
  - *Dies gilt nicht mehr in der Quantentheorie!* Es ist eben eine der Merkwürdigkeiten der Quantentheorie, daß die Wellenfunktion eine "reale" komplexe Größe ist. Mutter Natur kümmert sich nicht darum, ob wir das verstehen; es ist halt so.
  - Das ist vielleicht schwer zu akzeptieren, aber das galt für die die irrationalen Zahlen auch mal. **Pythagoras** ließ einen seiner Schüler sogar hinrichten, weil der Ketzer behauptete, daß es irrationale Zahlen *wirklich* gäbe. Heute ist es viel ungefährlicher, seinem Professor zu widersprechen, und auch das ist im Wesentlichen eine Errungenschaft der Naturwissenschaft/Technik und nicht der **Philosophie** .

Beziehung zwischen Wellen und Teilchen (de Broglie-Relation):

- Nach **de Broglie** gilt, daß es zwischen Teilchen und Wellen eine Beziehung gibt, insbesondere für massebehaftete Teilchen atomarer Größenordnungen. So gibt es Experimente, die sich nur durch die Beschreibung eines Elektrons als Welle verstehen lassen, andere aber nur durch die Beschreibung als Teilchen.
  - Zwischen dem Wellenaspekt (ausgedrückt in der Wellenlänge λ), und dem Teilchenaspekt (ausgedrückt als Impuls $\boldsymbol{p}$) gilt der Zusammenhang:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{h}}{\lambda}$$

- Mit h **= Plancksches Wirkungsquantum = 6.6262 · 10^{-34} J · s** (oft benutzt als "h quer" = **$\hbar$ = h/**π **= 1.0546 · 10^{-34} J · s**).

Mit Hilfe des Wellenvektors $\underline{\boldsymbol{k}}$ kann diese Beziehung auch vektoriell formuliert werden:

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \hbar \cdot \underline{\boldsymbol{k}}$$

Schlußendlich haben wir noch die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$

- Sie sagt uns, wie genau wir eine von zwei *komplentären* Größen kennen (nicht nur messen!) können, falls die Andere mit einer gegebenen Genauigkeit ("Δ") bekannt ist.

Aus der Quantenmechanik ist weiterhin die ganz allgemeine Energieformel bekannt, die für *alle* Wellen gilt und als ***E*** immer die (konstante) *Gesamtenergie* angibt.

$$E = h \cdot \nu$$

- Damit haben wir einen Satz von Beziehungen zwischen Welleneigenschaften, Teilcheneigenschaften, Energie und Impuls. Sie ergeben sich aus der Schrödingergleichung und fließen in die quantenmechanische Beschreibung von "Materiewellen" und anderer Wellen ein.