

2.4.2 Elektrische Leitfähigkeit des freien Elektronengases

Die richtige Formel

Die *klassische* Formel für die spezifische Leitfähigkeit war:

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \frac{l}{2(v_0 + v_D)} \approx \frac{n \cdot e^2 \cdot l}{2m \cdot v_0}$$

Das Problem war, daß nur *viel zu kleine* Werte für die mittlere freie Weglänge l zu vernünftigen Zahlenwerten für σ führten.

Wie löst sich jetzt das Problem?

Ganz einfach: Die *klassische* thermische mittlere Geschwindigkeit v_0 des freien Elektronengases, klassisch definiert durch

$$v_0^2 = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$$

muß durch die *wirkliche* mittlere Geschwindigkeit ersetzt werden.

Im Link kann man sich das noch illustriert anschauen

Das Pauli Prinzip verlangte ja, daß auch die Energieniveaus bei hohen Energien besetzt werden müssen, und da die Energie unseres freien Elektronengas rein kinetisch ist, heißt das, daß die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen hoch ist.

Wir können das auch daran sehen daß wir formal ja eine sehr hohe Temperatur für das Elektronengas ansetzen müßten, nämlich die Fermitemperatur $T_F = E_F/k$, um die klassischen Formeln benutzen zu können.

Wie groß ist die quantenmechanische mittlere Geschwindigkeit v_0^q ? Das ist jetzt nicht schwer zu "raten", wir nehmen als Größenordnung einfach die halbe "Fermigeschwindigkeit"

$$v_0^q = 1/2 \cdot v_F = \left(\frac{E_F}{2m_e} \right)^{1/2}$$

Wieder eine Näherung "nach Gefühl" - aber damit haben wir ja bereits gute Erfahrungen gemacht. Wir haben damit auch die sogenannte **Fermi-Geschwindigkeit** v_F definiert, einfach über $E_F = \frac{1}{2} m_e (v_F)^2$. Und als Mittelwert der Geschwindigkeit aller Elektronen nehmen wir *die Hälfte* der Fermi-Geschwindigkeit; das kann nicht ganz daneben liegen.

Für die Leitfähigkeit erhalten wir damit

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2 \cdot l}{m_e \cdot v_F}$$

Da v_F sehr viel größer ist als v_0 (*klassisch*), erhält man jetzt die richtige Größenordnung für die mittlere freie Weglänge: Bei Metallen liegt sie im Bereich von $l \approx 10^2$ nm.

Müßten wir jetzt nicht auch noch die Dichte der Elektronen auf die effektive Dichte im Aufweichungsintervall der Fermiverteilung reduzieren?

Nein! Denn *alle* Elektronen tragen zur Leitfähigkeit bei. Die meisten können zwar keine Energie aufnehmen, aber sie stehen ja nicht still, sondern laufen in Richtung ihres Wellenvektors durch den Kristall.

Damit trägt *jedes* Elektron zum Stromfluß bei. Allerdings wird es zu den meisten Elektronen, die in \mathbf{k} -Richtung fliegen, welche geben, die in entgegengesetzte Richtung laufen, d.h. der Nettostrom wird klein (und ohne äußere Spannung = $\mathbf{0}$) sein. Aber diesen Effekt haben wir in der Formel bereits berücksichtigt als wir die Driftgeschwindigkeit, und nicht die aktuelle Geschwindigkeit des Elektronenensembles in der Beschreibung der Leitfähigkeit verwendeten.

Der Einfluß von Temperatur und Defekten auf die Leitfähigkeit

Wir haben eigentlich **zwei** grundlegende Formeln für die Leitfähigkeit erhalten, und in beiden Formeln muß sich die Temperatur- und Defektabhängigkeit widerspiegeln. Die beiden Formeln waren:

$$1. \quad \sigma = \sum_i q_i \cdot n_i \cdot \mu_i$$

$$2. \quad \sigma = \frac{n_i \cdot e^2 \cdot l}{m_e \cdot v_F}$$

In der **ersten** Gleichung schauen wir auf **summarische** Eigenschaften von Teilchen einer Sorte i mit der Ladung q_i , nämlich auf die Konzentration n_i und die Beweglichkeit μ_i . In einer Erweiterung der früheren Formel steht jetzt noch ein Summenzeichen - damit erfassen wir die Möglichkeit, daß **verschiedene** Teilchensorten sich am Stromfluß beteiligen.

- Die Verschiedenheit kann sich auf alle drei Größen beziehen. In einem (flüssigen) Elektrolyten wird man z.B immer mindestens zwei verschiedene Ionensorten haben, die sich in allen drei Größen unterscheiden können; aber auch Elektronen mit z.B. verschiedenen Beweglichkeiten müssen wir als verschiedene Teilchen auffassen.
- Im allgemeinen müssen wir damit rechnen, daß die Konzentration und die Beweglichkeit von Defekten und der Temperatur beeinflusst werden; damit haben wir einen ersten Ansatz zur Beschreibung von $\sigma(T, \text{Defekten})$. In der Praxis nutzt man das auch - indem man gemessene $n(T, \text{Defekten})$ und $\mu(T, \text{Defekten})$ angibt.
- In der Theorie ist es schwieriger. Im Moment wissen wir nicht so recht, wie n_i und μ_i von T und Defekten abhängen. Für n_i werden wir das (für Halbleiter) noch detailliert behandeln; für die μ_i ist es (in der Theorie) immer schwierig.

Die **zweite** Gleichung (die natürlich völlig äquivalent zur ersten ist) macht die Theorie etwas einfacher; in der Praxis ist sie eher ungebräuchlich.

- Sie sagt uns, wie die Leitfähigkeit von dem Verhalten eines **einzelnen** "gemittelten" Ladungsträgers abhängt (meistens, aber nicht notwendigerweise, ein Elektron). Die Empfindlichkeit auf T und Defekte steckt jetzt in n (wie zuvor) und in l .

Falls wir uns erst mal nur auf Metalle beschränken, wird die Konzentration n der freien Elektronen ziemlich konstant sein - sie ist nur durch die Art des Metalls und der Bindung bedingt. Interessant ist also die Beweglichkeit μ **oder alternativ** die mittlere freie Weglänge l - und zu l haben wir ein unmittelbareres Verhältnis als zu μ .

- Da die mittlere freie Weglänge einfach der mittlerer Abstand zwischen zwei Stößen war, müssen wir uns jetzt damit beschäftigen, wie die Stoßerei von Temperatur und Defekten abhängt - in anderen Worten, wie sich die Temperatur auf die Stoßpartner auswirkt.
- Die möglichen Stoßpartner haben wir schon **mal aufgelistet**, wichtig waren nur die **Phononen** als wirkliche, teilchengewordene Gitterschwingungen, und **Defekte**, wie Fremdatome, Leerstellen oder Versetzungen.

Damit haben wir schon ein erstes wichtiges Unterscheidungskriterium:

- Extrinsische** Defekte sind fest gegeben - ihre Konzentration hängt nicht von der Temperatur ab. Sie werden die mittlere freie Weglänge selbstverständlich stark beeinflussen, aber primär über ihre vorgegebene Konzentration.
- Intrinsische** Defekte, d.h. in allen Metallen ausschließlich die **Leerstellen**, spielen nur bei sehr hohen Temperaturen eine (kleine) Rolle, und selbst dann ist ihre Konzentration in realen Materialien viel kleiner als die aller anderen Defekten - wir wollen sie **hier** schlicht "vergessen".
- Phononen**, d.h. Gitterschwingungen enthalten die thermisch Energie des Gitters. Bei **0 K** gibt es keine Gitterschwingungen und damit auch keine Phononen, mit zunehmender Temperatur wird es dafür mehr und mehr Phononen geben müssen - hier muß die wesentliche Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bzw. des spezifischen Widerstandes stecken.

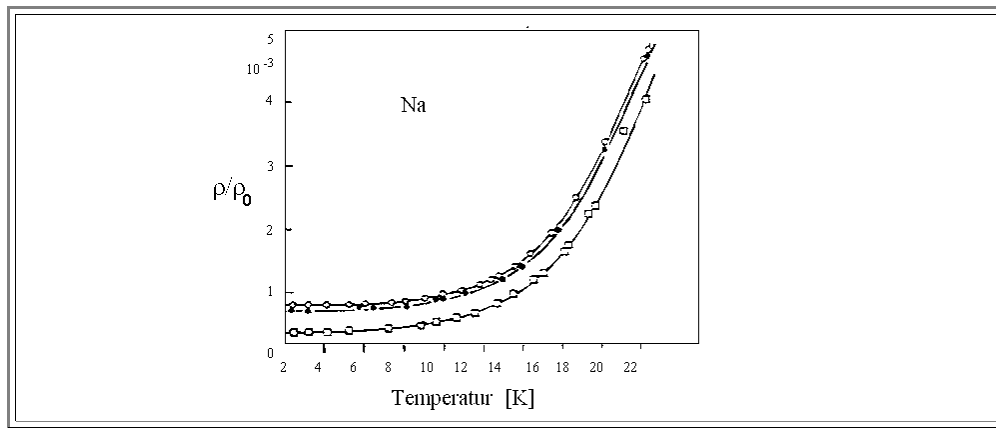
Wir können also **frohgemut** den folgende einfachen Ansatz machen (traditionell, weil am einfachsten, für den spezifischen Widerstand $\rho = 1/\sigma$ und nicht für σ).

$$\rho = \rho_P + \rho_D$$

- Dabei sei
 ρ_P = spez. Widerstand verursacht durch Stöße mit Gitterschwingungen (Phononen).
 ρ_D = spez. Widerstand verursacht durch Stöße mit Gitterdefekten.

Lange bevor man das so einfache postulieren konnte, war genau dieses Verhalten schon experimentell beobachtet worden, es hat sogar einen Namen und heißt **Mathiesen-Regel**.

- Ein Beispiel zeigt das folgende Bild, die drei Kurven stehen für verschiedene Verunreinigungs- bzw. Defektkonzentrationen.



Man erkennt, daß der spezifische Widerstands bei $\approx 0 \text{ K}$, der "**Restwiderstand**", ein indirektes Maß für die Qualität im Sinne von Defektfreiheit eines Materials ist.

Man kann das Verhältnis zum (nicht mehr defektdominierten) Widerstand bei Raumtemperatur bilden; das resultierende "**Restwiderstandsverhältnis**" ist dann ein gutes Qualitätsmaß und wird auch viel benutzt,

Bei "höheren" Temperaturen (in obigen Beispiel so ab $T \geq 20 \text{ K}$) findet man eine lineare Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes, d.h.

$$\rho \approx \rho_0 (1 + \alpha T)$$

Der Faktor α heißt "**Temperaturkoeffizient** oder Temperaturbeiwert, typische Werte sind:

Material	$\alpha [10^{-3} \text{ K}^{-1}]$
Ag	3,8
Al	3,9
Au	3,4
Cu	3,9
Ni	6,0
Na	4,0
Pb	3,9
W	4,5
Konstantan (Cu-Ni-Legierung)	0,0

Die elementaren Metalle unterscheiden sich also nicht so sehr - das würden wir auch "gefühlsmäßig" so erwarten.

Als Faustregel erkennt man für metallische Elemente

$$\Delta \rho \approx \frac{0,4\%}{^\circ\text{C}}$$

Das ist viel! Für den Glühfaden einer Glühlampe (aus **W**), die so bei $T \approx 2500 \text{ }^\circ\text{C}$ "brennt, hätte man nach dieser Faustregel eine Widerstandsänderung von **1000 %** zu erwarten, d.h. der Widerstand sollte sich verzehnfachen. In Wahrheit steigt er sogar um einen Faktor **19**, oder andersherum ausgedrückt: Im Moment des Einschaltens fließt der **19-fache** Strom relativ zum Dauerstrom!

Das Beispiel "**Konstantan**", (das hier als Extremfall stellvertretend für Legierungen steht), zeigt aber auch, daß sich in der Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands von "gemischten" Materialien noch einige Dinge verstecken, die wir an dieser Stelle noch nicht verstehen.

In "reinen" Elementmetallen ist der temperaturunabhängige Defektwiderstand ρ_D klein, denn wir haben wenig Defekte. In allen "Mixturen", d.h. Legierungen, gilt das nicht mehr.

Die Legierung A_xB_y können wir zunächst für den Fall $x \gg y$ so interpretieren, daß sich im "Wirtskristall" **A** jetzt viele atomare Defekte der Sorte **B** mit der Konzentration $c_D = y/(x + y) \%$ befinden. Wie ist dann der Widerstand? Auch dafür gibt es eine "Regel", die **Nordheim Regel**:

$$\rho = \frac{m_e \cdot v_F}{n_e \cdot e^2} \cdot \frac{c_D}{a}$$

Mit n_e = Elektronenkonzentration, c_D = Defekt-Konzentration (in Atomprozent) und a = Gitterparameter des Metalles

Das ist eine sehr traurige Regel, denn sie besagt, daß unser normales Wundermittel zur Verbesserung von Materialeigenschaften für die Leitfähigkeit *nicht* wirkt: Einführung und Manipulation von Defekten in jeder denkbaren Abwandlung macht den spez. Widerstand immer nur schlechter!

Es gibt *keine* Möglichkeit, unter den Wert von sehr perfektem Silber zu kommen! (Wir schließen dabei die Supraleiter natürlich aus).

Wie man durch Vergleich mit unserer "[Mastergleichung](#)" sofort erkennt, etabliert die Nordheim Regel folgende Beziehung

$$\rho(\rho_D) = \frac{a}{\rho_D}$$

Das ist, wenn man ein bißchen darüber nachdenkt, eine eigentlich überraschende Gleichung.

Denn zunächst wäre man doch wohl geneigt anzunehmen, daß die mittlere freie Weglänge l proportional zum *mittleren Abstand* l_D der Defekte ist. Und für l_D gilt eine andere Beziehung, nämlich

$$l_D = \frac{a}{(\rho_D)^{1/3}}$$

Der Widerspruch ist, mit etwas Nachdenken, leicht zu lösen - wir tun das in einer Übungsaufgabe

Übung 2.4-1

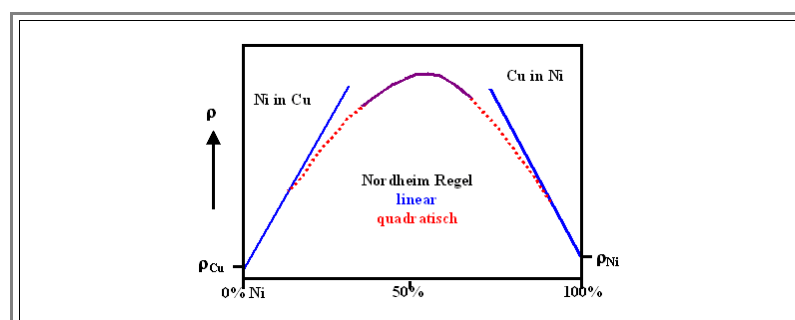
Defekte und mittlere freie Weglänge

Wenn wir jetzt auch hohe Konzentrationen ρ_D der Defekte zulassen, gilt (empirisch):

$$\rho = \frac{m_e \cdot v_F}{n_e \cdot e^2} \cdot \frac{\rho_D \cdot (1 - \rho_D)}{a_D}$$

Damit bekommt man schon ganz gute Näherungen für den spezifischen Widerstand ρ einer Legierung.

Das sieht dann so aus



Damit lassen wir es an dieser Stelle gut sein. Wir haben die Grundgleichungen für den spezifischen Widerstand, wir haben das Grundverständnis, und wir wissen, daß wir immer zwei Grundaufgaben lösen müssen:

1. Was bestimmt die *Dichte* der beweglichen Ladungsträger? Bei den Metallen war es die "Chemie", in Form der Metallbindung, aber wir können andere Mechanismen natürlich nicht ausschließen.
2. Was bestimmt die *Beweglichkeit* bzw. *mittlere freie Weglänge* der Ladungsträger? Hier fragen wir Stoßmechanismen, nach Mechanismen, die die im elektrischen Feld gewonnene Energie der Ladungsträger dissipieren, d.h. ans Gitter abführen.

Fragebogen / Questionnaire

Multiple Choice Fragen zu 2.4.2