

2.3.3 Eigenschaften Fermi-Dirac Statistik und erste Anwendungen

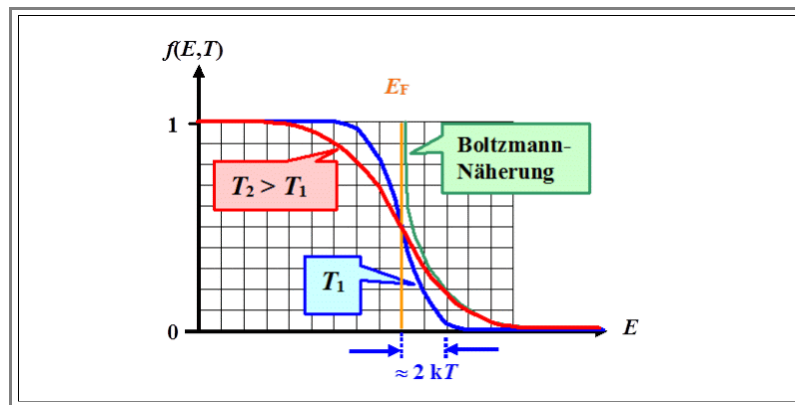
Zunächst betrachten wir das Grenzverhalten für $T \rightarrow 0 \text{ K}$

Wir bekommen

Für $E - E_F = \Delta E < 0$:	$f(E, 0K) = \frac{1}{\exp(-\infty) + 1} = 1$
Für $E - E_F = \Delta E > 0$:	$f(E, 0K) = \frac{1}{\exp(+\infty) + 1} = 0$

Das ist genau das, was wir brauchen.

Es ist nun verhältnismäßig einfach, die Fermiverteilung für eine gegebene Temperatur und Fermienergie auszurechnen. Man erhält eine Kurve wie folgt:



Das Rechteck bei $T = 0 \text{ K}$ bekommt mit steigender Temperatur zunehmend eine weiche Flanke; genauso wie wir es vorhersagen konnten.

Der "weiche" Bereich oder die "**Aufweichungszone**" hat dabei eine Breite von ungefähr 4 kT . Auch das entspricht der Vorhersage - aber jetzt können wir es ausrechnen; wir wollen das auch in einer Übungsaufgabe tun.

Wir können weiterhin vermuten, daß der "**Hochenergiewschwanz**" der Fermiverteilung durch die Boltzmannverteilung approximiert werden kann.

Für $E \gg E_F$ gilt

$$f(E, T) \approx \exp - \frac{E - E_F}{kT}$$

Das diese Beziehung stimmt, wird ebenfalls in der folgenden Übungsaufgabe gezeigt.

Übung 2.3-1

Eigenschaften der Fermiverteilung

Wir wollen eine Grundeigenschaft der Fermiverteilung noch mal wiederholen:

Sie regelt die Verteilung von **Fermionen** auf verfügbare Energieplätze *im Gleichgewicht*. Daraus folgt im Umkehrschluß

1. Die Fermiverteilung und damit insbesondere die Fermienergie (ein anderes Wort für chemisches Potential) ist *nur für das Gleichgewicht* überhaupt definiert.

2. Damit muß im **Gleichgewicht** die Fermienergie *überall im Material konstant sein*.

Eine weitere, mehr abstrakte Eigenschaft soll noch angesprochen werden:

- Wir haben die Fermienergie definiert als die Energie, bei der $f(E_F, T) = 1/2$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Energieniveau bei der Fermienergie besetzt ist, genau $1/2$.
- Es ist aber grundsätzlich möglich, daß es in der Umgebung der Fermienergie *gar kein Energieniveau gibt*. In anderen Worten: Die Fermienergie kann ohne weiteres in einem Energiebereich liegen, in dem die Zustandsdichte "zufällig" gerade = 0 ist.
- Oder noch mal anders formuliert: Die Fermiverteilung gibt nur die *Wahrscheinlichkeit* an, daß die bei der Energie E vorhandenen Plätze besetzt sind. Wie groß die Zahl der Plätze ist, vielleicht sogar Null, hat mit der Fermiverteilung nichts zu tun.
- Die *Volumendichte* $n(E) = N/V$ der Teilchen die auf den Plätzen bei E sitzen, oder die *Zahl* $N(E)$ ist immer gegeben durch

$$\begin{aligned}
 n(E) &= \text{Dichte der Plätze } \textit{mal} \\
 &= \text{Wahrscheinlichkeit der} \\
 &= \text{Besetzung } \textit{mal} \\
 &= \text{Energieintervall} \\
 &= D(E) \cdot f(E, T) \cdot \Delta E \\
 N(E) &= D(E) \cdot f(E, T) \cdot \Delta E \cdot V
 \end{aligned}$$

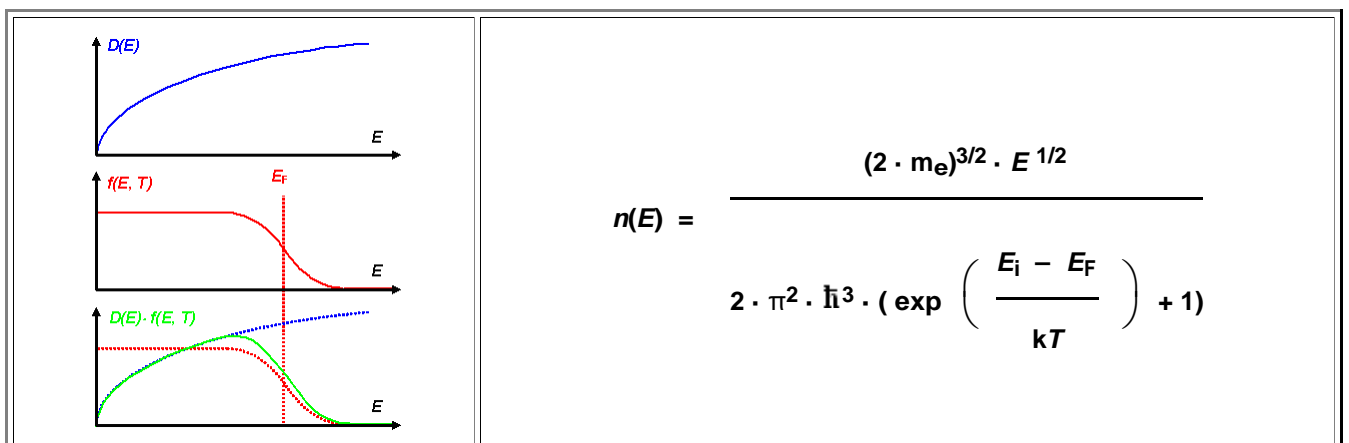
Das ist eine Schlüsselformel! Sie gilt für alle Systeme mit Fermionen! Wir schreiben sie mal genau so pompös auf, wie [früher](#) die Boltzmanverteilung:

Falls ein thermodynamisches System vieler freier Elektronen verschiedene Energiezustände E hat, mit $D(E)$ besetzbaren Plätzen bei E , dann ist im *thermodynamischen Gleichgewicht* die (differentielle) Teilchendichte $d(n(E)) / dE$ bei der Energie E gegeben durch

$$dn(E) = dE \cdot D(E) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right) + 1}$$

- Dabei ist $D(E)$, die Zustandsdichte, eine für das System charakteristische *Funktion*, und E_F , die Fermienergie, eine für das System charakteristische *Energie* (= Zahl).

Die Anwendung dieser Gleichung auf das Modell des freien Elektronengases liefert die folgende Graphik und Formel



- Wir erkennen ein gewisses Problem: Obwohl die Materie glasklar ist, und die entsprechenden Graphiken leicht zu konstruieren sind, werden die Formeln schon für den allereinfachsten Fall des freien Elektronengases etwas unhandlich! Das soll uns aber nicht schrecken, denn um mit länglichen Formeln einfach umgehen zu können, haben die Materialwissenschaftler den **Si-Chip** erfunden und auf Höchstleistung trainiert! Jeder handelsübliche **PC** oder Laptop mit einem einfachen Matheprogramm macht das mit Links!

Wir können jetzt sofort die **entscheidenden Gleichungen** für alles weitere aufschreiben:

- Die **Gesamtzahl** N bzw. die Dichte n aller Elektronen im System muß **per definitionem** gegeben sein durch

$$n = \int_0^{\infty} D(E) \cdot f(E, T) \cdot dE$$

- Die Zahl $N(E_1, E_2)$ bzw. Dichte n der Elektronen, die sich im **Energieintervall** (E_1, E_2) befinden, ist entsprechend

$$n(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} D(E) \cdot f(E, T) \cdot dE$$

- Die **gesamte Energie** $E_{\text{ges}}(E_1, E_2)$, die auf die Elektronen im Energieintervall (E_1, E_2) entfällt ergibt sich damit (pro Volumen) ganz einfach zu

$$E_{\text{ges}}(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} E \cdot D(E) \cdot f(E, T) \cdot dE$$

- Oben hätte man auch **gesamte Energiedichte** schreiben können aber dann ist nicht so klar welche Dichte man meint: pro Energieeinheit oder pro Volumen?

Zum Schluß noch zwei auf den ersten Blick etwas seltsame anmutende Beziehungen, die wir aber noch oft brauchen werden:

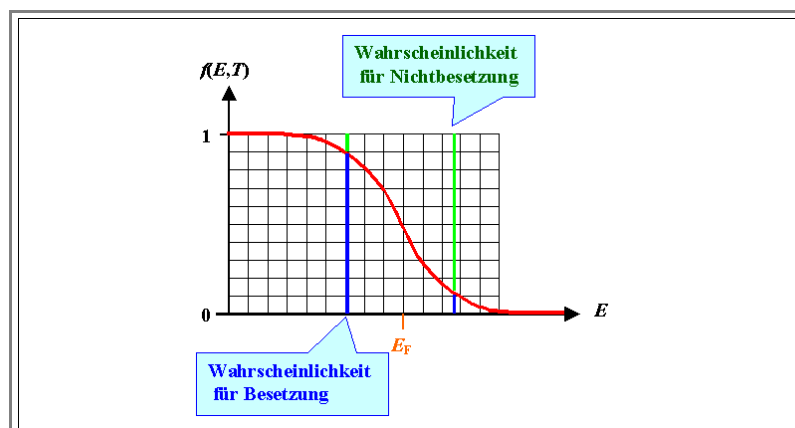
- Die Wahrscheinlichkeit w_h dafür, daß ein Platz bei der Energie E **nicht** besetzt ist, wird gegeben durch

$$w_h = 1 - f(E, T)$$

- Die Dichte n^* an "Teilchen", die nicht auf verfügbaren Plätzen sitzen, oder wir könnten auch sagen die Dichte der Nichtteilchen, oder schlicht die Dichte der noch freien Plätze, ist

$$n^*(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} D(E) \cdot (1 - f(E, T)) \cdot dE$$

- Wir schauen uns das noch schnell in einer Graphik an:



▀ Damit haben wir jetzt ein erstes mächtiges Werkzeug, um den elektronisch bedingten Eigenschaften der Materialien nachgehen zu können.