Advanced

Alternative Ableitung der Zustandsdichte

- Die Zustandsdichte ***D*(*E*)** der Elektronen ist elementar wichtig. Man kann sie, ohne die Schrödingergleichung zu lösen, ganz schnell ableiten indem man die Heisenbergsche Unschärferelation als "gottgegeben" hinnimmt.
- Die Grundannahme ist, dass *zwei* verschiedene Elektronenzustände sich sowohl im Ort ***x*** als auch im Impuls ***p*** um mindestens Δx und Δp unterscheiden müssen, wie es in der Heisenbergschen Unschärferelation festgelegt ist. Sonst wären die Zustände nicht zu unterscheiden, d.h. man hätte nur einen Zustand.
  - Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

- Beziehen wir das auf den ganzen Raum gilt

$$(\Delta x)^3 \cdot (\Delta p_x)^3 = h^3$$

  - Da wir eine Minimalrechnung machen ist das ≥ Zeichen jetzt durch ein Gleichheitszeichen ersetzt.
- Das kleinstmögliche "Volumen" $(\Delta p_x)^3$ eines Zustand im *Impulsraum* oder Phasenraum ist (mit $(\Delta x)^3 = V$ = betrachtetes Gesamtvolumen)

$$(\Delta p_x)^3 = \frac{h^3}{V}$$

- Alle Zustände mit $|p'| < |p|$ füllen im Impulsraum eine Kugel mit dem Volumen $V_p = 4\pi/3 \cdot |p|^3$. Die Zahl der Zustände $N(|p|)$ bekommen wir, wie gehabt, indem wir dieses Volumen durch das Volumen h^3/V *eines* Zustandes teilen. Wir berücksichtigen gleich, dass jeder Zustand wg. Spin zweimal zählt, und erhalten

$$N(|p|) = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot |p|^3 \cdot V}{3h^3}$$

- Jetzt brauchen wir noch eine Beziehung zwischen Impuls ***p*** und kinetischer Energie ***E*** (andere als kinetische Energien gibt es beim freien Elektronengas ja nicht). Dafür nehmen wir das klassische $E = p/2m$ mit **m** = Masse der Elektronen.
- Zur Zustandsdichte $D(E) = D(p(E))$ kommt man durch Substitution von ***p*** durch ***E***, differenzieren nach ***E*** (gibt Zustände dE pro dE) und dividieren durch das Volumen ***V***. Wir erhalten

$$D(E) = 4\pi \left(\frac{2 \cdot m}{h^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2}$$

- Das ist exakt unsere alte Formel (falls man statt **h** noch $\hbar \cdot 2\pi$ einsetzt).