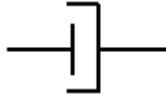


9.2.2 Der E - Modul und sein "Ersatzschaltbild"

Das elastische Verhalten eines Polymers - inklusive der **Anelastizität** und **Viskoelastizität** - lässt sich modellmäßig sehr einfach durch eine Art **mechanisches "Ersatzschaltbild"** beschreiben.

Alles was wir brauchen ist eine **ideale Feder**: 

und einen **"Stoßdämpfer"**:



Wir beschreiben diese Elemente durch ihre Bewegungsgleichungen.

Die Feder enthält den **E -Modul** des Materials und beschreibt den **perfekten elastischen** Teil der Verformung durch

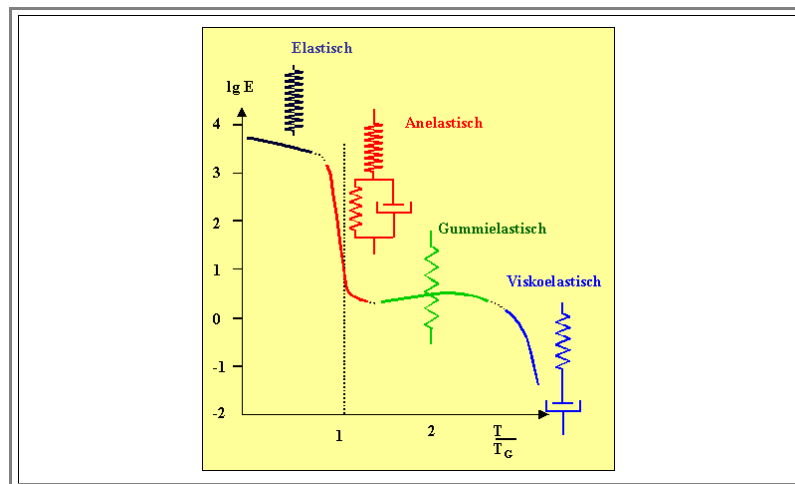
$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \cdot \sigma(t)$$

Ein Stoßdämpfer ist ein Element, das bei konstanter anliegender Spannung eine konstante Dehnungsgeschwindigkeit zeigt. Es gehorcht der Gleichung

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma(t)$$

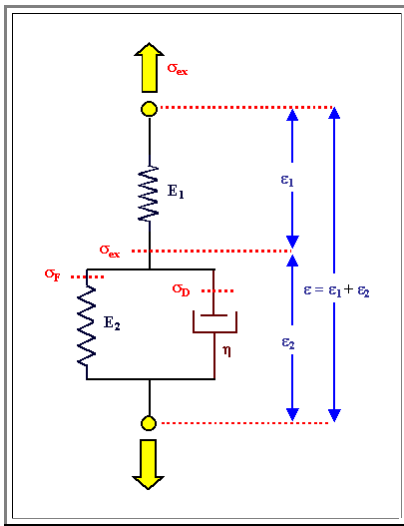
Mit η = **Viskosität** des Materials; $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$

Das **visko-elastische Verhalten** der **E(T)** Kurve kann dann mit folgenden Ersatzschaltbildern beschrieben werden:



Wie sich so eine Kombination Feder - Stoßdämpfer bei Belastung verhält, haben wir alle im Gefühl. Es ergeben sich tatsächlich die elastischen, und insbesondere anelastischen und viskoelastischen $\epsilon(t)$ Kurven, die wir im vorhergehenden Unterkapitel **beschrieben haben**.

Aber wir müssen es nicht im Gefühl haben - wir können es jetzt auch rechnen. Betrachten wir zum Beispiel das folgende Ersatzschaltbild.



- Wir können die Gesamtdehnung ϵ als Summe der Einzeldehnungen ϵ_1 und ϵ_2 darstellen (wobei wir bei großen Dehnungen etwas aufpassen müssen).
- Freischneiden an den rot punktierten Stellen sagt uns, daß wir an Feder **2** die Spannung σ_F vorliegen haben; am Stoßdämpfer die Spannung σ_D . Beide zusammen entsprechen der externen Spannung σ_{ex} die auch an Feder **1** anliegt.
- Damit haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \sigma_{ex} &= \sigma_F + \sigma_D \\ \sigma_{ex} \\ \epsilon_1 &= \frac{\sigma_F}{E_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{\sigma_F}{E_2} \\ \frac{d\epsilon_2}{dt} &= \frac{\sigma_D}{\eta} \end{aligned}$$

- aus denen wir eine einfache Differentialgleichung für ϵ_2 erhalten:

$$\sigma_{ex} = \epsilon_2 \cdot E_2 + \eta \cdot \frac{d\epsilon_2}{dt}$$

Die Lösung mit der Anfangsbedingung $\epsilon_2(t=0) = 0$ ist

$$\epsilon_2(t) = \frac{\sigma_{ex}}{E_2} \left(1 - \exp - \left(\frac{E_2}{\eta} \cdot t \right) \right)$$

- Addieren wir noch $\epsilon_1 = \sigma_{ex} / E_1$, die instantan erfolgende Dehnung der "in Serie" geschalteten Feder, bekommen wir als Gesamtlösung:

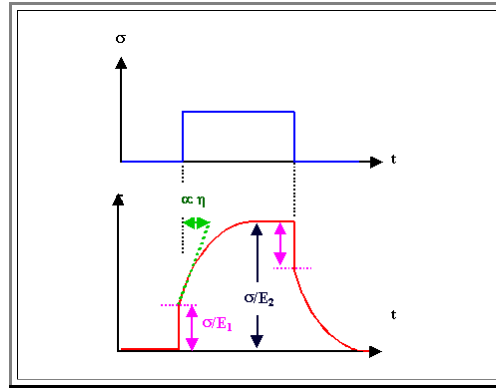
$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_{ex}}{E_1} + \frac{\sigma_{ex}}{E_2} \left(1 - \exp - \left(\frac{E_2}{\eta} \cdot t \right) \right)$$

- Dazu machen wir eine Übung

Übung 9.2-1

Rechnen mit mechanischem Ersatzschaltbild

Die durch diese Lösung beschriebene Funktion $\epsilon(t)$ für eine plötzlich ein- bzw. ausgeschaltete Spannung σ sieht so aus



Wir haben die Anelastizität modelliert.

Mit einem geeignetem Ersatzschaltbild können wir so ziemlich jede viskoelastische und anelastische Dehnung beschreiben, vorausgesetzt wir wählen die geeigneten Parameter E_i und η_i für die erforderlichen Federn und Stoßdämpfer.

E_i und η_i sind natürlich stark von der Temperatur und der Konformation abhängig.

Wir müssen uns jetzt fragen: Was bedingt die E und η der Elemente des Ersatzschaltbilds? Was sind die mikroskopischen Mechanismen der Anelastizität, der Viskoelastizität, der Gummielastizität und so fort?

Damit werden wir uns im nächsten Unterkapitel beschäftigen.