

7.2 Der allgemeine Spannungszustand

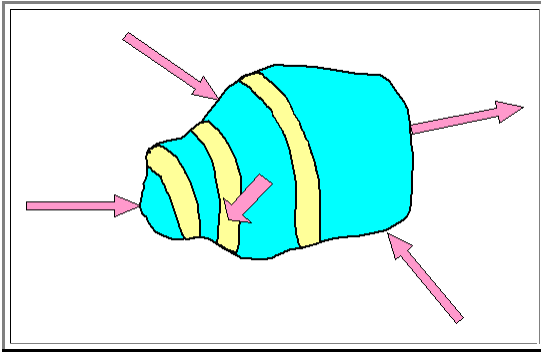
7.2.1 Der Spannungstensor

Die allgemeine Verformung erfordert eine Beschreibung mit Tensoren

Schauen wir uns die allgemeinste (und schwierigste) Aufgabe der **Elastizitätstheorie** an. Ein beliebig geformter Körper, anisotrop und nicht homogen, wird beliebigen Kräften ausgesetzt. Die einzigen Einschränkungen sind

- 1. Alle Verformungen sind elastisch.
- 2. Die Summe aller Kräfte und Drehmomente ist Null, da der Körper sich nicht bewegen soll.

Die einfache Frage ist jetzt: *Wie ändert sich die Gestalt des Körpers?*



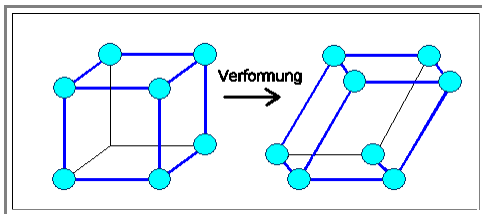
- Wir verformen sozusagen eine Kartoffel, ein Auto, oder einen optoelektronischen Chip (der aus vielen Schichten verschiedener Einkristalle besteht).
- Beliebige Kräfte und Kraftfelder (nicht nur "Punktkräfte" wie gezeichnet) sind zugelassen.

- Wie ändert sich die Gestalt? Man bedenke, daß in obiger "Kartoffel" noch Hohlräume sein könnten - gefüllt mit Vakuum oder Gasen unter irgendeinem Druck!

Das ist so ungefähr das schwierigste Problem, das die klassische Physik zu bieten hat. Die Elastizitätstheorie ist vergleichsweise viel schwieriger (und mathematisch anspruchsvoller) als die Elektrodynamik mit den Maxwellgleichungen.

- Wir werden hier jedoch nur einige der notwendigen Zutaten und einige ganz allgemeine Schlußfolgerungen betrachten, da wir uns letztlich viel mehr für die *plastische Verformung* interessieren.

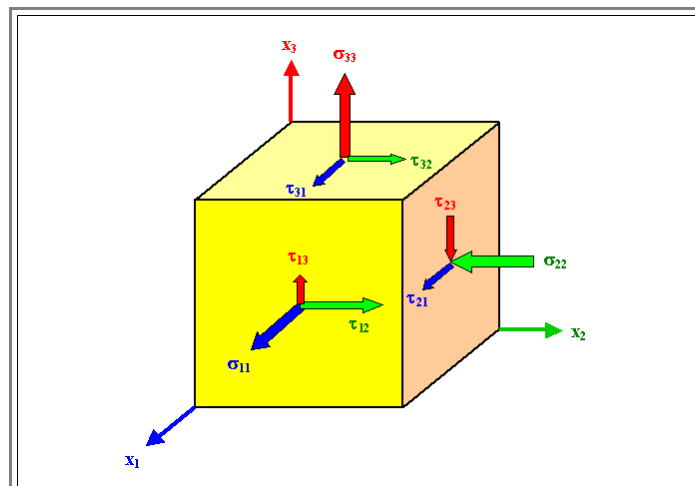
Zur mathematischen Beschreibung des Problems unterteilen wir den Körper in lauter (differentiell) kleine Volumenelemente, d.h. kleine Würfelchen.



- Vor* Anlegen der verformenden Kräfte und Kraftfelder sind diese Volumenelemente perfekte kleine Würfelchen; wenn man will: kubische Gitter.
- Durch die Verformung werden aus den Würfeln deformierte Körper; das Gitter ist jetzt triklin.
- Der Verformungszustand des gesamten Körpers ist durch die Angabe der Verformungszustände aller Volumenelemente eindeutig festgelegt.

Als Einstieg in die Gesamtproblematik ist es also sinnvoll, sich den allgemeinsten Verformungszustand eines würfelförmigen Volumenelementes zu betrachten. Dies wird direkt zu einer weitreichenden Erkenntnis führen.

Wir betrachten jetzt also *einen* Elementarwürfel und überlegen, welche Spannungen wir auf den Flächen des Würfelchens anbringen müssen, um es in einen *beliebigen* verformten Zustand zu überführen. Das ist im Bild unten gezeigt.



Wir müssen auf *jede* Fläche des Würfels eine Normalspannung *und* eine Scherspannung wirken lassen. Die Scherspannung kann in eine beliebige Richtung wirken; es ist aber sinnvoll, sie in zwei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zu zerlegen.

- Die Spannungen sind durch Pfeile dargestellt - aber Vorsicht: *Spannungen sind keine Vektoren*; wir werden gleich sehen, was sie sind. Die Richtung der Pfeile gibt deshalb die Richtung der wirkenden Kraftkomponente an.
- Für die effektive Buchführung haben die Spannungen *zwei* Indizes; d.h. wir schreiben τ_{ij} für die Scherspannung die auf der Ebene i in Richtung j wirkt; die Normalspannungen sind dann automatisch mit σ_{ii} indiziert.

Es liegt nun nahe, die diversen Komponenten der Spannungen zu ordnen; wir fassen sie in einer Matrix zusammen

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Offenbar brauchen wir alle **9** Komponenten dieser Matrix um den allgemeinen Spannungszustand des Elementarwürfels zu beschreiben.

- In anderen Worten: Wir müssen an jedem Punkt (x, y, z) des Körpers *neun* Zahlen kennen, um seinen Spannungs- und Verformungszustand zu beschreiben. Das mathematische Gebilde das diese Aufgabe meistert heißt **Tensor**; es ist die Weiterführung des Begriffs des Vektors.
- $\sigma_{ij}(x,y,z)$ ist der **Spannungstensor** des Verformungszustandes. Er verursacht an jedem Volumenelement $V(x,y,z)$ entsprechende Dehnungen, die dann völlig analog durch einen **Dehnungstensor** $\epsilon_{ij}(x,y,z)$ beschrieben werden.

Die Bedingung, daß der Körper sich *nicht bewegen soll*, erlaubt uns, den Spannungstensor etwas zu vereinfachen. Nehmen wir für den Elementarwürfel einen Würfel mit Einheitsflächen, entsprechen die einzelnen Komponenten des Spannungstensors direkt den wirkenden Kräften F_{ij} .

- Die Bedingung $\sum F = 0$ und $\sum M = 0$ ($M =$ Drehmomente) führt auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{-i-j} \\ \tau_{ij} &= \tau_{ji} \end{aligned}$$

- Damit reduziert sich der Spannungstensor (und damit auch der Dehnungstensor) auf die Angabe von **6** unabhängigen Komponenten.

Was ist ein Tensor?

Ein kurzes Wort zu Tensoren als *mathematische Objekte*. Am einfachsten kann man einen Tensor als Gebilde auffassen, das zwei Vektoren verknüpft.

- Betrachten wir die Definition der Spannung σ , Wir hatten $\sigma = F/A$, und F war die auf die Fläche A wirkende Kraft.
- Dabei hatten wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Kraft F *senkrecht* auf der Fläche A steht. Zwischenzeitlich haben wir aber auch Spannungszustände behandelt, bei denen die wirkende Kraft aus beliebiger Richtung auf die Bezugsfläche wirkt. Wir müssen jetzt sowohl \underline{F} als auch \underline{A} als die *Vektoren* behandeln, die sie schließlich auch sind.

Die Division zweier Vektoren ist nicht definiert, aber wir müssen obige Gleichung für σ nur umschreiben um eine wohldefinierte Vektorgleichung zu bekommen

$$\underline{F} = \sigma \cdot \underline{A}$$

- Wobei der Vektor \underline{A} der Normalenvektor der betrachteten Fläche A ist.

Bisher waren bei Vektorgleichungen dieser Art die betrachteten Vektoren alle *colinear*, d.h. sie zeigten in dieselbe Richtung und unterschieden sich nur im Betrag. Man denke z. B. an das Newtonsche Grundgesetz $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$.

- Die Verknüpfung der beiden Vektoren erfolgt dabei zwangsweise über einen **Skalar**.

Falls wir diese Restriktion fallen lassen wollen, d.h. nach gesetzmäßigen Verknüpfungen zweier Vektoren suchen, die aber beliebige Richtungen zulassen, dann ist die einfachst denkbare mathematischen Verknüpfung, daß jede Komponente des Vektors \underline{F} von allen Komponenten des Vektors \underline{A} abhängt, d.h. in formelmäßiger Darstellung

$$\begin{aligned}
 F_x &= \sigma_{xx} \cdot A_x + \sigma_{xy} \cdot A_y + \sigma_{xz} \cdot A_z \\
 F_y &= \sigma_{yx} \cdot A_x + \sigma_{yy} \cdot A_y + \sigma_{yz} \cdot A_z \\
 F_z &= \sigma_{zx} \cdot A_x + \sigma_{zy} \cdot A_z + \sigma_{zz} \cdot A_z
 \end{aligned}$$

- Die σ_{ij} sind dann die Komponenten eines Tensors, im Beispiel des Spannungstensors. Das Gleichungssystem oben legt auch schon fest, *wie ein Tensor mit einem Vektor multipliziert wird*. Im wesentlichen gelten die Regeln der [Matrixalgebra](#).

Ein Vektor ist *mehr* als drei Zahlen - er hat bestimmte mathematische Eigenschaften die physikalische Realitäten widerspiegeln, zum Beispiel transformieren sich seine Komponenten beim Wechseln des Koordinatensystems, d.h. bei Koordinatentransformationen, in eindeutig bestimmter Weise; siehe den [Basismodul](#) dazu.

- Für Tensoren gelten ähnliche Regeln und Bedingungen; auch die neun Komponenten eines Tensors müssen bestimmten Transformationsvorschriften genügen.
- Mehr dazu in einem [besonderen Modul](#), hier soll nur *eine* daraus resultierende Eigenschaft angesprochen werden:

So wie man für *einen* gegebenen Vektor immer ein Koordinatensystem finden kann, in der zwei Komponenten des Vektors verschwinden, d.h. = Null sind, kann man für einen gegebenen Tensor immer ein Koordinatensystem finden, in dem alle Nichtdiagonalelemente des Tensors = Null sind. In diesem **Hauptachsensystem** reduziert sich der Spannungstensor auf

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

- (Ein Index genügt jetzt).

Das Hauptachsensystem spielt eine große Rolle in der Elastizitätstheorie; seine Bestimmung für ein gegebenes Problem ist immer der entscheidende Schritt zur Lösung des Problems

Tensoren führen also den Begriff des Vektors weiter; sie verallgemeinern Beziehungen zwischen (physikalischen) Größen.

- Wir haben jetzt *skalare* Größen - die Angabe *einer* Zahl an jeder Koordinate (x, y, z) genügt, um die betrachtete *skalare Eigenschaft* vollständig zu beschreiben. Ein Beispiel ist die Temperatur. Die Angabe einer Zahl an jedem Punkt bildet dann ein *Skalarfeld*.
- Vektoren* benötigen *drei* Zahlen; Beispiele sind die Geschwindigkeit oder die elektrische Feldstärke. Wir ordnen jedem Punkt des Raums einen Vektor, einen "Pfeil" zu und erhalten Vektorfelder. Die Maxwell Gleichungen sind Angaben über die Beziehung dieser Vektorfelder (sowie des Skalarfelds der Ladung) und ihrer zeitlichen Änderungen.
- Tensoren* benötigen *neun* Zahlen an jeder Koordinate; wir erhalten ein Tensorfeld.

Da die Rechenregeln für diese mathematischen Gebilde viele Gemeinsamkeiten haben, faßt man alle diese Systeme zusammen unter dem Oberbegriff "**Tensoren der x-ten Stufe**", mit $x = 0$ für Skalare, $x = 1$ für Vektoren und $x = 2$ für "gewöhnliche" Tensoren.

- Ein Verdacht regt sich. *Wo hört das auf?*
- Die Antwort: In der Mathematik - *Nimmermehr!* In Physik und Materialwissenschaft zur Zeit bei Tensoren der 4. Stufe. Einige derartige Tensoren der 4. Stufe haben wir (unwissentlich) schon kennen gelernt. Schauen' mer mal.

Elastische Moduln als Tensoren 4. Stufe

Der Elastizitätsmodul [war definiert](#) als $E = d\sigma/d\epsilon$, oder, falls die Dehnung (wie wir immer voraussetzen) der Spannung proportional ist, $E = \sigma/\epsilon$.

- Wir wissen jetzt aber, daß σ und ϵ Tensoren 2. Stufe sind. Falls wir den *E-Modul* E als Tensor 0. Stufe, d.h. als Skalar auffassen, ist die in ϵ enthaltene Richtung der Dehnung immer dieselbe wie die in σ enthaltene Richtung der Kraftkomponente. Das muß selbstverständlich nicht so sein.
- In einem elastisch stark anisotropem Medium, das beispielsweise nur in einer einzigen Richtung leicht dehnbar ist (ein hexagonaler Einkristall?), wird der Hauptanteil der Dehnung immer in der "leichten" Richtung zu finden sein - auch wenn wir schräg dazu ziehen!

Wir schreiben also $\sigma = E \cdot \epsilon$, aber lassen zu, daß jede Komponente des Tensors σ von jeder Komponente des Tensors ϵ abhängen kann. Der Elastizitätsmodul E muß damit ein Tensor höherer, nämlich 4. Ordnung werden. Ausgeschrieben sieht das so aus (mit c statt E weil sich das so eingebürgert hat):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11 11} \cdot \epsilon_{11} + c_{11 12} \cdot \epsilon_{12} + c_{11 13} \cdot \epsilon_{13} + c_{11 21} \cdot \epsilon_{21} + c_{11 22} \cdot \epsilon_{22} \\ &\quad + c_{11 23} \cdot \epsilon_{23} + c_{11 31} \cdot \epsilon_{31} + c_{11 32} \cdot \epsilon_{32} + c_{11 33} \cdot \epsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= c_{12 11} \cdot \epsilon_{11} + \dots \\ \dots &= \dots\end{aligned}$$

- Es wird schnell langweilig, wir schreiben deshalb einfacher in *Matrixnotation* und mit der *Konvention*, dass über gleiche Indizes automatisch summiert wird

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

- Wir haben also **81** Komponenten c_{ijkl} des Tensors **4. Stufe**, den wir als simplen *E-Modul* kennen lernten. Um Verwechslungen auszuschließen, werden sie mit *c* abgekürzt und heißen **elastische Koeffizienten**.

Glücklicherweise haben Kristalle immer noch gewisse Symmetrien - selbst das triklin Gitter. Bei einem kubischen Kristall zum Beispiel, darf es auch für Probleme der Elastizitätstheorie keinen Unterschied machen, ob ich das Koordinatensystem um **90°** drehe.

- Spielt man das für die **14** Bravaisgitter durch, läßt sich die Anzahl der unabhängigen elastischen Koeffizienten reduzieren. Was bleibt sind

- Maximal **21** unabhängige Koeffizienten für *trikline* Kristalle
- Minimal **2** unabhängige Koeffizienten für *kubische* Kristalle (und für vollständig isotrope amorphe oder feinkristalline Stoffe).

- Deswegen reichten uns zwei unabhängige elastische Moduln für isotrope Systeme, wie wir in dem *vorangehenden* Kapiteln auch *immer* betont (aber nicht begründet) haben.

Selbstverständlich gilt das auch für die anderen elastischen Moduln.

- Allgemeine Gleichungen der Elastizitätstheorie sind also Tensorgleichungen mit Tensoren **4. Stufe** - hier wird deutlich, warum Elastizitätstheorie *viel komplexer* sein kann als z.B. die Elektrodynamik mit den "simplen" Vektorgleichungen von Maxwell.

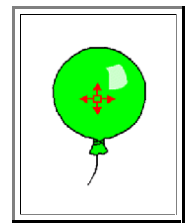
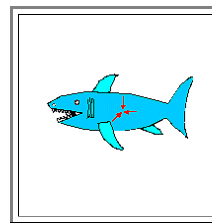
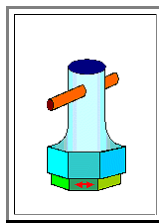
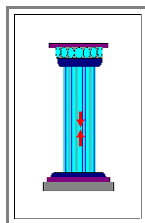
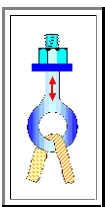
- Nicht zufällig sind sich die *allgemeine Relativitätstheorie* und die Elastizitätstheorie mathematisch ähnlich - erstere behandelt, wenn man so will, die Verformung des Raums an sich unter dem Einfluß von Massen.

Die implizit aber schon ausgesprochene *gute* Nachricht ist aber:

- Meist reichen **2** elastische Koeffizienten, die wir dann auch in geeigneter Kombination *elastische Moduln* nennen, denn damit kann man alle kubischen Kristalle, alle Polykristalle (in denen sich die Anisotropien der Körner wegmitteln) und viele amorphe Materialien vollständig erfassen.

- Wir wollen jetzt nicht mehr weiter in die Elastizitätstheorie eindringen - wir haben alle grundlegenden Begriffe um jetzt reale Materialien betrachten zu können - unter Einschluß der *plastischen Verformung* und des *Bruchs*.

Vorher aber schauen wir uns die im *vorhergehenden Kapitel* besprochenen speziellen Spannungszustände im Lichte des Spannungstensors noch einmal an. Hier sind die entsprechenden Zeichnungen; der jeweilige Spannungstensor ist angegeben.



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{12} \\ 0 & \tau_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$