

7.1.3 Elastische Moduln

Ein genauer Blick auf den Elastizitätsmodul

Schauen wir uns den Zugversuch etwas genauer an. Wir haben ihn schon zweimal bemüht - in [Kapitel 2](#) und hier in [Kapitel 7](#).

- Beim Anlegen einer *einachsigen* Spannung an unsere zylindrische Probe wurde diese länger (für Zugspannungen) oder kürzer (für Druckspannungen). Im elastischen Bereich reicht der **Elastizitätsmodul** $E = d\sigma/d\epsilon$ vollständig zur Beschreibung der Längenänderung.
- Da für "normale" Materialien immer $E \approx \text{const.}$ gilt, folgt als "**Materialgesetz**" für die Dehnung in Zug- oder Druckrichtung :

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$

Dieses Materialgesetz hat einige wichtige Eigenschaften, die implizit enthalten bzw. vorausgesetzt sind, und die hier aufgelistet werden sollen.

- Es gilt für *isotrope* Materialien. Egal, in welche Richtung ich ziehe, ich erhalte immer dieselbe Verformung.
- Es folgt *direkt* aus den Bindungspotentialen. Als Näherungsformel für E hatten wir [erhalten](#):

$$E = \frac{n \cdot m}{r_0^3 \cdot U_0}$$

- n , m , r_0 und U_0 waren die 4 Parameter, die ein [Bindungspotential beschreiben](#).
- Bei der elastischen Verformung werden *Bindungsabstände geändert* (die Ausnahme Gummi, [früher schon erwähnt](#), wird uns noch ausführlich beschäftigen).
- Die Verformung ist vollständig *reversibel* - mit zunehmender Spannung nimmt die Dehnung zu; wird die Spannung wieder heruntergefahren, geht die Dehnung zurück. Bis auf *Null* - der Ausgangszustand *vor* dem Zugversuch wird *nach* Ende des Versuchs wieder erreicht.
- Das Systems "antwortet" *instantan* mit der durch das Materialgesetz gegebenen *Dehnung* ϵ auf den "Input" (oder die "Störung") *Spannung*. Es braucht nur ganz kurze Zeit (idealerweise gar keine), um auf geänderte Spannungen zu reagieren. Die beim Zugversuch [vorgegebene](#) Verformungsgeschwindigkeit $d\epsilon/dt$ spielt also keine Rolle - wir erhalten immer *dieselbe* Spannungs-Dehnungskurve.
- Die Spannungs-Dehnungskurve ist eine *Gerade* - zumindest ungefähr, da sonst E nicht konstant sein kann. Dies bedeutet, daß wir das Bindungspotential hinreichend gut durch eine Parabel beschreiben können.
- Die Temperaturabhängigkeit des E -Moduls ist durch die Temperaturabhängigkeit der Bindungsverhältnisse beschrieben. In der [früher schon abgeleiteten](#) Faustformel $E \approx 80 \cdot kT/\Omega$ tritt die Temperatur explizit auf. Wir erwarten generell, daß die Materialien mit zunehmender Temperatur etwas "weicher" werden, d.h. daß der E -Modul mit zunehmender Temperatur abnimmt.

Zahlenwerte für den E-Modul finden sich in den Links

- [Wie gut ist die Faustformel für E?](#)
- [Graphik und Tabelle](#).

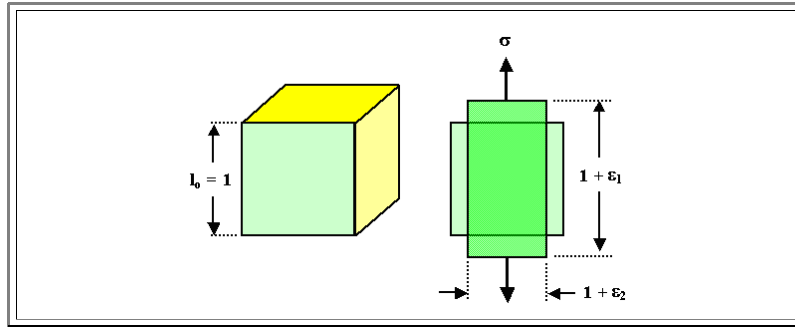
Es steckt also eine ganze Menge in dem einfachen elastischen Materialgesetz $\epsilon = \sigma/E$ - aber es reicht *trotzdem* nicht aus, um den einfachst möglichen Fall einer Verformung, der *einachsigen elastischen Verformung*, zu beschreiben.

- Denn unsere Probe wird nicht nur *länger* (oder, bei Druck *kürzer*) werden, sondern auch *dünnere* (oder *dicker*).
- Das entspricht nicht nur der allgemeinen Erfahrung, sondern ergibt sich auch sofort falls wir unterstellen, daß sich die *Dichte* des Materials nicht nennenswert ändern kann, d.h. dass das Volumen konstant bleiben muss.

Dieses Phänomen heißt **Querkontraktion**; wir beschreiben es zunächst rein formal.

Die Querkontraktion

Wir greifen ein Volumenelement aus einem unter einachsigen Zug stehenden Körper heraus und betrachten seine **komplette** elastische Formänderung.



Aus dem Einheitswürfel mit der Seitenlänge $l_0 = 1$ wird ein **Quader**.

- In Zugrichtung hat der Quader die Länge $l_z = 1 + \epsilon_1$ und ϵ_1 ist durch den **E-Modul** bestimmt zu $\epsilon_1 = \sigma/E$.
- Der Würfel wird aber auch dünner werden; die Grundfläche des Quaders ist jetzt ein Quadrat mit der lateralen Seitenlänge

$$l_x = l_y = 1 + \epsilon_2$$

In dem (notgedrungen **negativem**) ϵ_2 steckt das ganze Phänomen der **Querkontraktion**.

- Aus der Kenntnis des **E-Moduls** heraus können wir **keine** Aussage über ϵ_2 machen. Hinter dieser "**Querdehnung**" verbirgt sich also ein **zweiter** elastischer Modul, allgemein definiert als **Querkontraktionszahl** ν , manchmal auch **Poissonzahl** genannt.

$$\nu := - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

- Damit haben wir

$$\epsilon_2 = - \nu \cdot \epsilon_1 = - \nu \cdot \frac{\sigma}{E}$$

Wie kommen wir zu Aussagen über ν ? Im Prinzip steckt natürlich alles in den Bindungen, aber wir können uns das Leben sehr erleichtern indem wir einfach die experimentelle Beobachtung verwenden, daß sich das **Volumen** eines verformten Körpers nicht stark ändert.

- Als Übungsaufgabe berechnen wir die Querkontraktionszahl für $\Delta V = 0$

Übung 7.1-1

Querkontraktionszahl

Alle Querkontraktionszahlen liegen in einem relativ kleinen Wertebereich, da sonst große Dichteänderungen auftreten würden; typischerweise finden wir:

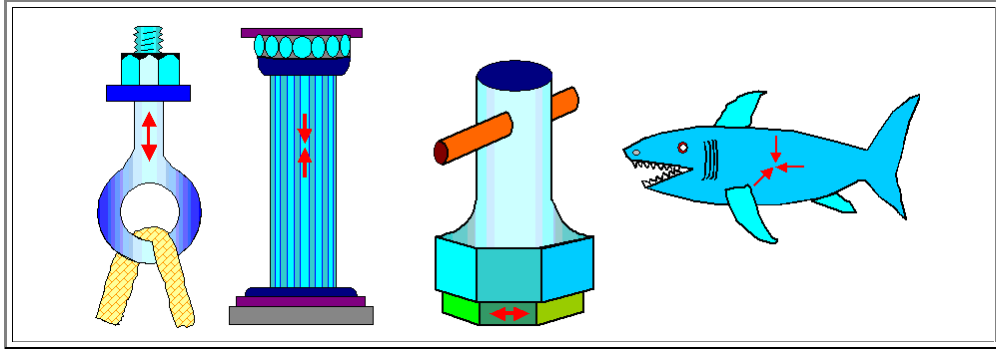
Material	ν
Metalle	0,25 - 0,35
Polymere	0,3- 0.4
Diamant	0,2 (kleinster Wert)
$\Delta V = 0$	0,5

Früher wurde gelegentlich der *Reziprokwert* der Querkontraktionszahl; die **Querzahl** verwendet.

- Das mag zu Fehlern führen; der Unterschied ist aber eigentlich immer klar: Die *Querkontraktionszahl* ist immer < 1 , die *Querzahl* dann immer > 1

Der Schub- oder Schermodul

Der Zugversuch deckt zwar viele real vorkommende *Spannungszustände* ab - aber bei weitem nicht alle. Das Bild unten zeigt einige einfache Alltagssituationen, die besonderen, nämlich hochsymmetrischen Spannungszuständen entsprechen

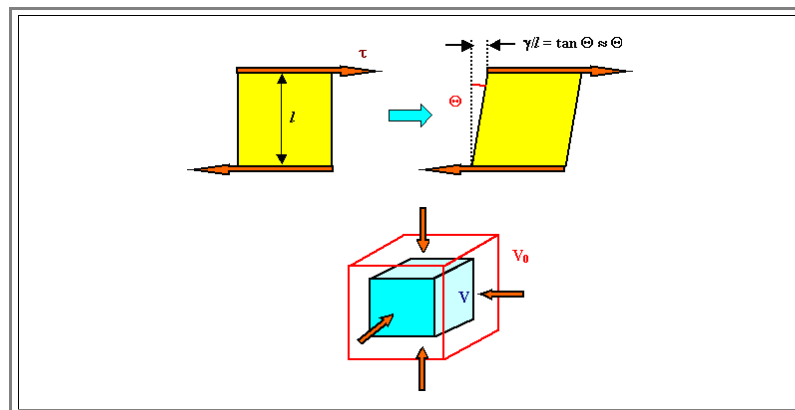


Nur die beiden linken Spannungszustände fallen unter die Rubrik "**einachsiger Zug**" bzw. "**einachsiger Druck**" und sind damit mit **E-Modul** und Querkontraktionszahl ν *vollständig* beschreibbar.

- Der Schraubenschlüssel dagegen verkörpert den Fall einer **reinen Scherung**. Am besten kann man sich das klarmachen, wenn man sich überlegt, was für Kräfte auf die Flächen der Schraube wirken.
- Der Fisch wiederum unterliegt einem **allseitig gleichen Druck**, also einem speziellen (da hochsymmetrischen) *drei*achsigen Spannungszustand.

Die zugehörigen Verformungen können nicht direkt mit **E** und ν beschrieben werden; wir müssen erstmal *zusätzliche* elastische Moduln definieren.

- Wie wir in Kürze sehen werden, *müssen* wir eigentlich nicht - es ist aber sowohl zweckmäßig, als auch besser an die Historie anknüpfend, vor dem allgemeinsten Fall einer beliebigen dreiachsigen Verformung noch die oben gezeigten Spezialfälle zu behandeln.
- Dazu schauen wir uns an, wie sich ein **Einheitswürfel** für *reine Scherung* und *allseitigen Druck* verformt.



- Reine Scherung (nur auf einer Fläche gezeigt) verformt ein *Quadrat* zu einem *Rhombus* durch eine Abscherung um γ ; allseitiger Druck läßt die Gestalt unverändert, aber verkleinert das Volumen um $\Delta V = V_0 - V$.

Die für reine Scherung und allseitigen Druck spezifischen Formänderungen kann man mit Hilfe von Proportionalitätskonstanten mit den wirkenden Spannungen verknüpfen, die allgemein verwendeten Beziehungen sind

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\Delta V = - \frac{\sigma \cdot V_0}{K}$$

- **G** heißt **Schubmodul**; engl "Shear modulus". **K** ist der **Kompressionsmodul**. Die Definitionsgleichungen für diese *elastische* Moduln sind also

$$G := \frac{\tau}{\gamma}$$

$$K := \frac{\sigma \cdot V_0}{\Delta V}$$

Damit haben wir jetzt **4** elastische Module definiert; wir könnten so weiter machen für andere spezielle Fälle. Es drängt sich die Frage auf:

- Wie viele elastische Moduln braucht man, um alle möglichen Spannungs- und Verformungszustände zu beschreiben?

Die Antwort muß differenziert ausfallen:

- Für *homogene isotrope* Materialien - ein Stück polykristallines Metall oder amorphes Glas zum Beispiel - reichen *zwei* elastische *Konstanten*.
- Für *anisotrope* Materialien - zum Beispiel einen *triklinen* Einkristall - brauchen wir maximal **21** elastische *Koeffizienten*. Begründen werden wir das später.

Schauen wir uns den einfachen Fall des isotropen Materials an. Die wesentliche Erkenntnis ist, daß jede Verformung durch eine geeignete *Folge* von einfachen Grundspannungszuständen erreicht werden kann.

- Der durch allseitigen Druck verursachte Verformungszustand kann zum Beispiel (im Gedankenexperiment) alternativ auch erreicht werden, indem man den Körper *zuerst* durch einachsigen Druck entlang der **z**-Achse verformt, dann zweitens und drittens entlang der **x**- und **y**-Achse.
- Das machen wir mal in einer Übungsaufgabe:

Übung 7.1-2

Beziehung zwischen **E**, **v** und **K**

Die Erzeugung einer reinen Scherverformung durch mehrfach angewandten einachsigen Zug oder Druck ist etwas komplizierter; es ist in einem *eigenen Modul* dargestellt. Das Ergebnis ist

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \approx 0,4 E \quad (\text{für } \nu \approx 0,3)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \approx 0,8 E \quad (\text{für } \nu \approx 0,3)$$

- Im Prinzip ist es gleichgültig welchen Satz an **2** elastischen Moduln wir verwenden. Es ist aber - wie immer - empfehlenswert, diejenigen Größen zu wählen, die am besten zur Fragestellung passen.

Es gibt noch weitere spezielle Spannungszustände - die Hülle eines Luftballons oder Reaktor Druckkessels steht zum Beispiel unter *zweiachsigen Zug* - wir wollen jetzt aber (nach einem kleinen Einschub) gleich zum allgemeinsten Fall übergehen, dem *beliebigen elastischen* Spannungs- und Dehnungszustand in beliebigen Körpern.