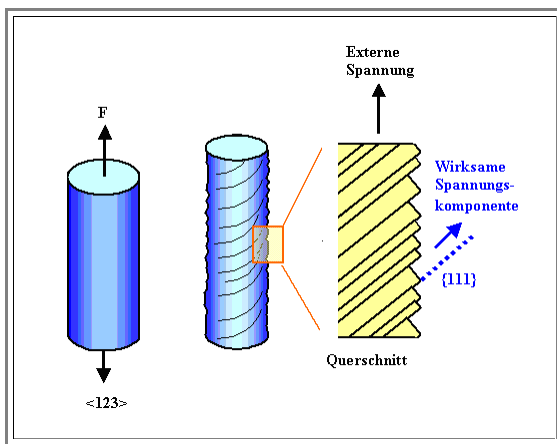


7.1.2 Normal- und Scherspannungen

Zugversuch am Einkristall und Motivation für vektorielle Betrachtung

- Bei üblichen Verformungsexperimenten mit *polykristallinen* (d.h. makroskopisch homogenen) technischen Materialien kann man davon ausgehen, daß das Material *isotrop* ist und sich im Zugversuch radialsymmetrisch verformt -es wird an einer gegebenen Stelle gleichmäßig dünner; der Querschnitt bleibt kreisförmig.
- Obwohl Einkristalle in der *mechanisch*-technischen Welt *fast* nicht vorkommen (die Ausnahme sind einkristalline Turbinenschaufeln auf **Ni** Basis), ist der Zugversuch an Einkristallen besonders wichtig für das Verständnis der im Material ablaufenden Prozesse während einer Verformung.
- Wir machen deshalb jetzt (in Gedanken) einen Zugversuch mit einem **fcc** Einkristall; wobei wir nicht in eine der hochsymmetrischen (d.h. "niedrig indizierten") Richtungen ziehen, sondern z.B. in die $\langle 123 \rangle$ Richtung. Das Spannungs-Dehnungsdiagramm wird uns später begegnen, hier ist nur wichtig, daß wir etwas *sehr Merkwürdiges* beobachten werden.
- Der Kristall wird zwar länger (und etwas dünner), aber der Querschnitt wird *elliptisch* und die (vorher polierte) Oberfläche wird "schuppig" oder treppenförmig. Das Ganze sieht etwa so aus:

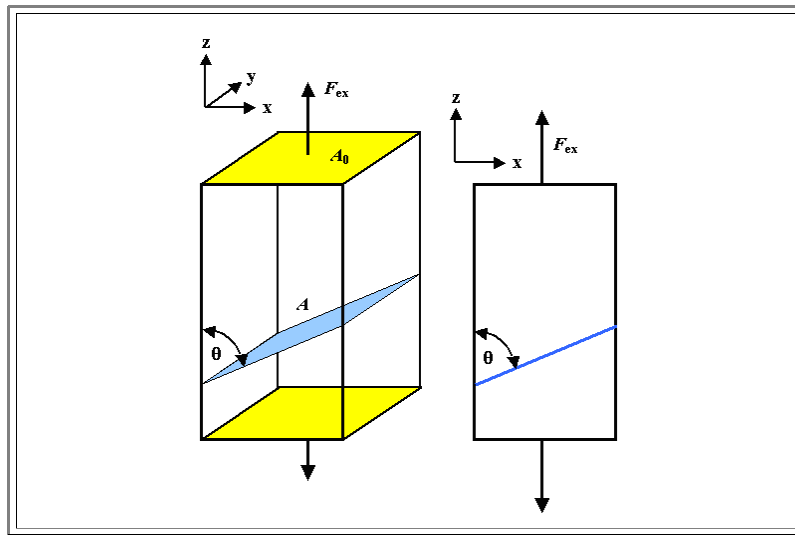


- Falls wir einen Querschnitt genau betrachten, sehen wir an der Außenseite eine Art Treppmuster; mit Stufenhöhen im **nm** bis **μm** Bereich.
- Das ganze sieht mikroskopisch so aus, als ob der Kristall entlang einer $\{111\}$ Ebene in lauter kleine Scheiben unterschiedlicher Dicke zerlegt wurde, die dann entlang von **Gleitebenen** etwas gegeneinander verschoben wurden.
- Diese Gleitebenen sind im schematischen Ausschnitt schwarz eingezeichnet dargestellt; in einem **fcc** Kristall werden wir, wie angedeutet, als Gleitebenen immer $\{111\}$ Ebenen finden
- Ist das eigentlich wirklich merkwürdig? Was hätten wir denn erwartet? Wie soll der Einkristall auf Zugspannungen reagieren?

- Eine nicht einfache Frage; wir werden auf sie zurückkommen. Zunächst jedoch nehmen wir das Experiment nur zum Anlaß um uns klar zu machen, daß Kräfte, die nur in *eine* Richtung wirken, *nicht* ausreichen, um den Zugversuch hinreichend zu beschreiben.
- Offensichtlich verschieben sich die Kristallebenen relativ zueinander in Richtungen, die *schräg* zur Zugrichtung stehen. Von der wirkenden Kraft oder besser *Spannung*, die wir von außen anlegen, wird letztlich nur die Komponente wirksam, die in der *Gleitebene* liegt auf der die Kristallblöcke aufeinander abzurutschen scheinen.
- Wir müssen also zunächst den Zugversuch *vektoriell* betrachten und uns die formale Beschreibung der möglichen *Spannungszustände* im Material erarbeiten.

Normal- und Scherspannungen

- Was wir tun müssen ist:
 - Eine (zur Zugrichtung) beliebig orientierte Fläche **A** herausgreifen.
 - Die extern wirkende Kraft $F_{\text{ex}} = \sigma_{\text{ex}} \cdot A_0$ vektoriell zerlegen: In eine Kraft F_{norm} die *senkrecht* auf der Fläche **A** steht und eine Kraft F_{scher} die *in A* liegt.
 - Die beiden Teilkräfte dividiert durch die Fläche ergeben dann die sogenannte **Normalspannung** und die **Scherspannung** in der Fläche **A**
- Wir führen dieses Programm mal aus für den noch vereinfachten Fall, daß die Ebene **A** nur "schräg" bezüglich *einer* Koordinatenachse liegt. Dann genügt *ein* Winkel θ um die Geometrie zu beschreiben. Dies ist unten dargestellt.

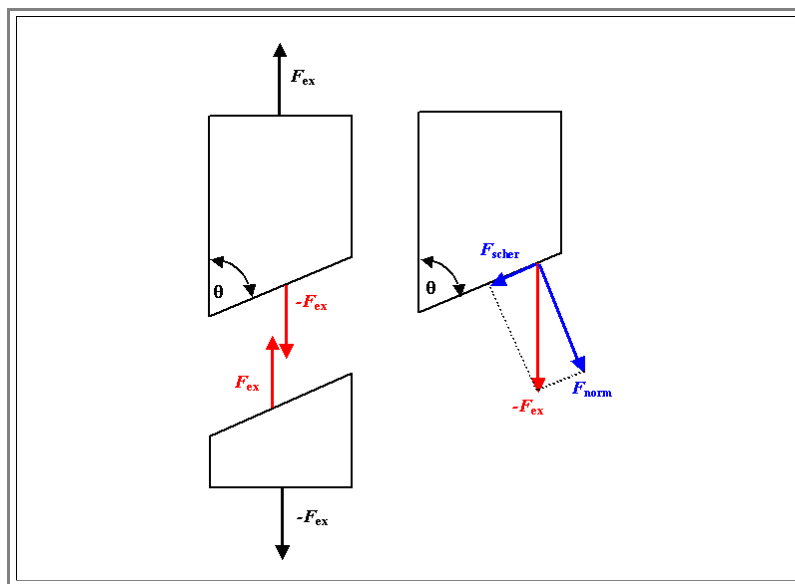


Einfache Trigonometrie liefert die folgende Beziehung für die **Fläche A** der Ebene **A**

$$A = \frac{A_0}{\sin \theta}$$

Zur Ermittlung der Normal- und Scherspannungen in der Ebenen **A** bedienen wir uns nun eines sehr wichtigen allgemeinen Konzeptes, das in vielen Varianten in allen möglichen technischen Situationen immer wieder auftauchen wird: Wir "**schneiden**" die Ebene **A** gedanklich frei und lassen auf die beiden Teilstücke Kräfte derart wirken, daß sich **nichts ändert**, d.h. die **Freischneidung** ohne Folgen bleibt.

Das sieht dann so aus:



Links die Situation nach dem Freischneiden. Wir müssen offenbar die Kräfte **F_{ex}** und **-F_{ex}** anbringen um zu verhindern, daß die Probe jetzt auseinander läuft.

Rechts ist die Vektorzerlegung von **-F_{ex}** in die Normalkraft **F_{norm}** und die Scherkraft **F_{scher}** gezeigt.

Für die beiden Kräfte gilt

$$F_{\text{norm}} = F_{\text{ex}} \cdot \sin \theta$$

$$F_{\text{scher}} = F_{\text{ex}} \cdot \cos \theta$$

Dividieren durch die Fläche **A = A₀/sin θ** der (noch etwas speziellen) Ebene **A** ergibt für die **Normal- und Scherspannung** in **A**

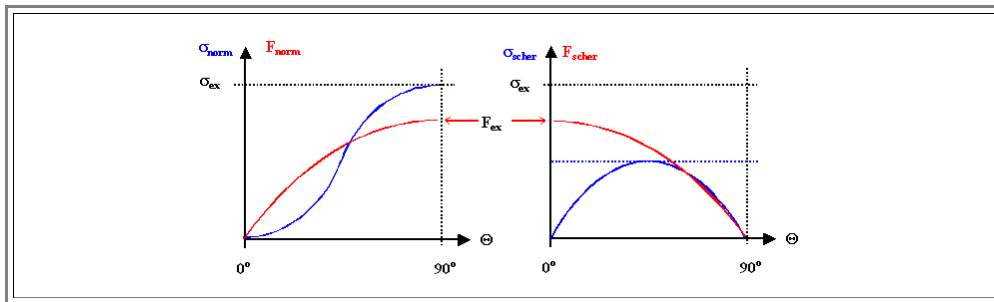
$$\sigma_{\text{norm}} = \frac{F_{\text{norm}}}{A} = \frac{F_{\text{ex}} \cdot \sin \theta}{A_0 / \sin \theta} = \frac{F_{\text{ex}} \cdot \sin^2 \theta}{A_0} = \sigma_{\text{ex}} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\sigma_{\text{scher}} = \frac{F_{\text{scher}}}{A} = \frac{F_{\text{ex}} \cdot \cos \theta}{A_0 / \sin \theta} = \frac{F_{\text{ex}} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{A_0} = \frac{F_{\text{ex}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \theta}{A_0} = \frac{\sigma_{\text{ex}}}{2} \cdot \sin 2 \theta$$

● Für eine beliebige Ebene, die dann durch **zwei** Winkel charakterisiert werden muß, erhalten wir etwas längere, aber immer noch einfach ableitbare Beziehungen. Dies wird in einem [eigenen Modul](#) ausgeführt, da uns hier die mit den obigen Formeln ableitbaren Schlußfolgerungen genügen.

▶ Zunächst machen wir uns klar, daß zwischen **Spannungen** und **Kräften** jetzt ein **fundamentaler Unterschied** besteht; sie sind nicht mehr Synonyme für im wesentlichen dieselbe Situation, d.h. nur durch einen konstanten Faktor unterschieden.

● Dies wird am ehesten sichtbar, wenn wir die Spannungen und Kräfte als Funktion des Winkels θ auftragen



● Es ist unmittelbar ersichtlich, daß Spannungen und Kräfte jetzt **grundverschieden** sind. Für $\theta \Rightarrow 90^\circ$ haben wir zum Beispiel $F_{\text{scher}} \Rightarrow 0$, weil $A \Rightarrow \infty$ strebt. Die Singularität $0/\infty$ ist jedoch "gutmütig" und ergibt schlicht 0 .

● Die Scherspannungen laufen durch ein Maximum bei $\theta = 45^\circ$ und erreichen maximal **die Hälfte** der extern anliegenden Spannung σ_{ex}

▶ Scherspannungen und Normalspannungen verhalten sich also recht verschieden. Wir würdigen dies, indem wir ihnen verschiedene Abkürzungen geben:

● **Normalspannungen** werden (wie bisher) mit σ abgekürzt, während wir für **Scherspannungen** ab sofort immer die Abkürzung τ verwenden.

▶ Das Konzept von Normalspannungen σ und Scherspannungen τ wird sehr weit tragen; es ist wichtig, sich damit vertraut zu machen.

● Wir werden zum Beispiel noch sehen, daß für **plastische Verformung** die Scherspannungen verantwortlich sind, während der **Bruch** durch Normalspannungen verursacht wird - aber zunächst wenden wir unser erweitertes Spannungskonzept wieder auf rein **elastische** Verformungen an.