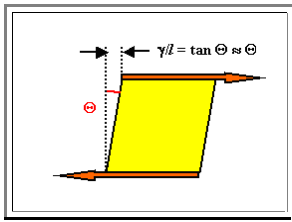


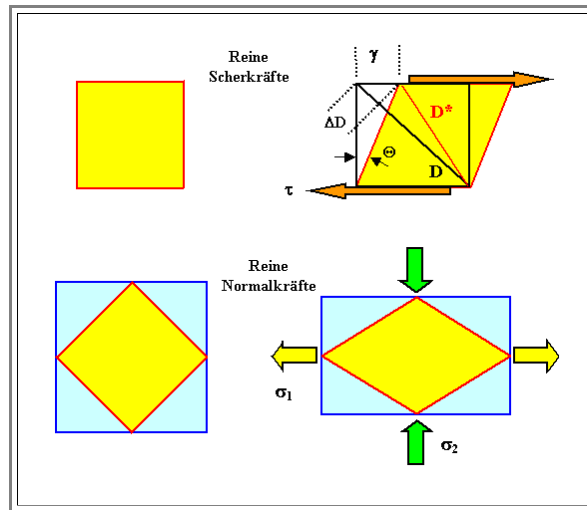
## Beziehung zwischen E-Modul und Schermodul

Advanced

Wie kann man die durch reine Scherspannung erzeugte Verformung durch reine Normalspannungen erhalten? Falls wir einen Weg finden, bekommen wir automatisch eine Beziehung zwischen Schermodul  $G$  und Elastizitätsmodul  $E$ .



- Die Ausgangslage ist links gezeigt. Die reine Scherspannung verformt ein Quadrat in ein Raute.
- Wir können exakt die gleiche Verformung auch anders erhalten. Dazu betten wir *gedanklich* unser Quadrat (oder dreidimensional unseren Würfel) in ein identisches Material ein wie unten gezeigt.



Oben die Verformung mit reinen Scherkräften, unten exakt die gleiche Verformung mit reinen Normalkräften - nach Drehung um  $45^\circ$  und "Einbettung".

- Das klappt offenbar - wir erhalten dieselbe Verformung. Nun wollen wir damit den Schermodul berechnen.

Der Schermodul war definiert als  $G = \tau/\theta$ .

- Wir können das auch über die Änderung der Diagonalen  $\Delta D = D - D^*$  ausdrücken, da  $\gamma^2 = 2\Delta D^2$ , gilt  $\gamma = 2^{1/2} \cdot \Delta D$ .
- Damit kann man  $\theta$  wie folgt ausdrücken:

$$\theta = \frac{\gamma}{l} = \frac{2^{1/2} \cdot \Delta D}{D} = \frac{2 \cdot \Delta D}{D}$$

- $l$  ist die Länge des inneren Würfels; für kleine Winkel (die wir hier immer voraussetzen) gilt  $l \approx 2^{1/2} D$ .

Was bekommen wir mit den Normalspannungen  $\sigma$ ?

- Die erste Verformung mit nur  $\sigma_1$  gibt eine Längenänderung der Diagonalen (Querkontraktion bei der zweiten Diagonalen beachten)

$$\frac{\Delta^{(1)}D_1}{D_1} = \epsilon^{(1)}_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\frac{\Delta^{(1)}D_2}{D_2} = \epsilon^{(1)}_2 = -\nu \cdot \epsilon^{(1)}_1 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$$

Wird jetzt die zweite Verformung mit  $\sigma_2$  überlagert, erhalten wir den zweiten Satz an Dehnungen.

$$\frac{\Delta^{(2)}D_2}{D_2} = \epsilon^{(2)}_2 = \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\frac{\Delta^{(2)}D_1}{D_1} = -\nu \cdot \epsilon^{(2)}_2 = +\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$$

Solange die Dehnungen klein sind, dürfen wir sie linear überlagern, und erhalten

$$\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{\Delta^{(1)}D_1 + \Delta^{(2)}D_1}{D_1} = \frac{\sigma_1 + \nu \cdot \sigma_2}{E}$$

$$\frac{\Delta D_2}{D_2} = \frac{\Delta^{(1)}D_2 + \Delta^{(2)}D_2}{D_2} = \frac{\sigma_2 + \nu \cdot \sigma_1}{E}$$

Da die beiden Diagonalen entgegengesetzt gleichgroße Längenänderungen erfahren müssen, erhalten wir als erstes Resultat  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ .

- Die Scherkräfte auf die Flächen des gelben Quadrats bzw Würfels sind damit

$$F_T = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-1/2} \sigma \cdot A_{\text{blau}} = 2^{-1/2} \sigma \cdot A_{\text{blau}}$$

- da jede der jeweils 2 wirkenden Kräfte eine Komponente  $2^{-1/2}$  in der gelben Ebene hat und dort zur Hälfte wirkt;  $A_{\text{blau}}$  ist die Fläche des blauen Würfels.
- Die Fläche des gelben Würfels ist  $A_{\text{gelb}} = 2^{-1/2} \cdot A_{\text{blau}}$ , damit erhalten wir für die Scherspannungen

$$\tau = \frac{F_t}{A_{\text{gelb}}} = \sigma$$

Einsetzen von  $\sigma = \tau$  in die  $\Delta D/D$  Formel und [umschreiben](#) auf  $\theta$  ergibt

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\sigma(1+\nu)}{E} = \frac{\tau(1+\nu)}{E} = \frac{\theta}{2}$$

Als Endergebnis erhalten wir

$$\tau = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \theta$$

Das ist die im [Skript gegebene Formel](#), falls wir den Schermodul  $G$  definieren als

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Diese Umrechnung ist natürlich nur eine Art indirekte Hauptachsentransformation. Eine Rotation des Koordinatensystems um  $45^\circ$  hätte genau die richtige Spannungsverteilung gezeitigt; siehe den [entsprechenden Modul](#).