Lösungen zur Übung 6.3-1

Illustration

Wir haben die Formeln:

- Absolute Wahrscheinlichkeit $w_N(x)$ mit N digitalen (nur **+ 1** und **– 1**)Würfeln die Zahl x zu würfeln (x kann positiv *und* negativ sein).

$$W_N(x) = 0{,}5 \cdot \frac{N!}{2^N \cdot \{1/2 \cdot (N + x)\}! \cdot \{1/2 \cdot (N - x)\}!}$$

- Die Stirlingformel

$$\ln y! \approx (y + 1/2) \cdot \ln y - y + \ln (2\pi)^{1/2}$$

Was ergibt sich für $W_N(x)$ wenn man mit der Stirlingschen Formel die Fakultäten nähert?

- Dabei kann auch noch die physikalische Näherung $x/N << 1$ verwendet werden, um (über eine geeignete Reihenentwicklung) die Ausdrücke zu vereinfachen.

Vorbemerkung: So wie diese Aufgabe jahrelang in Hyperskript stand, kam am Ende ein falsches Ergebnis heraus. Das lag nicht daran, dass ich hier falsch gerechnet habe, sondern.... (*weiter unten selber gucken*)

Wir ignorieren zunächst den roten Faktor **0,5**; er stammt aus etwas tieferen Überlegungen bei der Ableitungen der Wahrscheinlichkeit. Wir können ihn später einfach wieder einsetzen

- Die Ausgangsgleichungen sind dann

$$W_N(x) = \frac{N!}{2^N \cdot \{1/2 \cdot (N + x)\}! \cdot \{1/2 \cdot (N - x)\}!}$$

$$\ln y! \approx (y + 1/2) \cdot \ln y - N + \ln (2\pi)^{1/2}$$

- Schreibt man die **1.** Gleichung mit Hilfe der Stirlingschen Formel aus, erhält man

$$\begin{aligned}\ln w = \; & (N + ½) \cdot \ln N - N + \ln(2\pi)^{1/2} \\ & - \{[(½(N + x) + ½) \cdot \ln [½(N + x)] - [(½(N + x)] + \ln (2\pi)^{1/2}\} \\ & - \{[(½(N - x) + ½) \cdot \ln [½(N - x)] - [(½(N - x)] + \ln (2\pi)^{1/2}\} \\ & - N \cdot \ln 2\end{aligned}$$

- Die roten und blauen Terme addieren sich zu Null, es bleibt

$$\begin{aligned}\ln w = \; & \{(N + ½) \cdot \ln N - \ln (2\pi)^{1/2} - N \cdot \ln 2\} \\ & - \{[(½(N + x) + ½) \cdot \ln [½(N + x)]\} \\ & - \{[(½(N - x) + ½) \cdot \ln [½(N - x)]\}\end{aligned}$$

- Der rote Zeile läßt sich schreiben als

$$\{\,\} = N \cdot \ln N + \tfrac{1}{2} \cdot \ln N - \ln (2\pi)^{1/2} - N \cdot \ln 2$$

$$= N \cdot \ln (N/2) + \ln (N/2\pi)^{1/2}$$

- und den blauen Term schreiben wir als

$$N \cdot \ln (N/2) = \tfrac{1}{2}(N + x + 1) \cdot \ln (N/2) + \tfrac{1}{2}(N - x + 1) \cdot \ln (N/2) - \ln (N/2)$$

- Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln w = \; & \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) \\ & + \tfrac{1}{2}(N + x + 1) \cdot \ln (N/2) \\ & + \tfrac{1}{2}(N - x + 1) \cdot \ln (N/2) \\ & - \left\{\tfrac{1}{2}(N + x + 1) \cdot \ln [\tfrac{1}{2}(N + x)]\right\} \\ & - \left\{\tfrac{1}{2}(N - x + 1) \cdot \ln [\tfrac{1}{2}(N - x)]\right\} \end{aligned}$$

- oder, zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \ln w = \; & \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) \\ & + \tfrac{1}{2}(N + x + 1) \cdot \{\ln (N/2) - \ln [\tfrac{1}{2}(N + x)]\} \\ & + \tfrac{1}{2}(N - x + 1) \cdot \{\ln (N/2) - \ln [\tfrac{1}{2}(N - x)]\} \end{aligned}$$

- Die erste Zeile läßt sich zusammenfassen zu

$$\ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln (N/2) = \ln (N/2\pi)^{1/2} - \ln [(N/2)^2]^{1/2} = \ln (2/N\pi)^{1/2}$$

- Die **ln** Ausdrücke in der **2.** und **3.** Zeile lassen sich zusammenfassen zu

$$\{\ln (N/2) - \ln [\tfrac{1}{2}(N + x)]\} = \ln \frac{N \cdot 2}{2 \cdot (N + x)} = \ln \frac{N}{N + x} = -\ln (1 + x/N)$$

$$\{\ln (N/2) - \ln [\tfrac{1}{2}(N - x)]\} = \ln \frac{N \cdot 2}{2 \cdot (N - x)} = \ln \frac{N}{N - x} = -\ln (1 - x/N)$$

- Damit haben wir

$$\begin{aligned} \ln w = \; & \ln (2/N\pi)^{1/2} \\ & - \tfrac{1}{2}(N + x + 1) \cdot \ln (1 + x/N) \\ & - \tfrac{1}{2}(N - x + 1) \cdot \ln (1 - x/N) \end{aligned}$$

Weiter kommt man nicht, jetzt muß *genähert* werden

- **N** war die Zahl der digitalen Würfel, die nur **+ 1** oder **– 1** als Augenzahl haben, **x** war die Summe der Augen, d.h. die gewürfelte Zahl zwischen **– N** und **+ N**.

- Da wir immer nur Systeme mit sehr großen **N** betrachten, ist es ziemlich unwahrscheinlich, Ergebnisse in der Nähe von **– N** und **+ N** zu bekommen; wir können immer **x << N** annehmen.
- Damit wird aus den **ln** Ausdrücken der beiden letzten Zeilen näherungsweise

$$\begin{aligned} \ln(1 + x/N) &\approx +x/N \\ \ln(1 - x/N) &\approx -x/N \end{aligned}$$

- und wir erhalten

$$\begin{aligned} \ln w \approx\ & \ln(2/N\pi)^{1/2} \\ & - \tfrac{1}{2}(N + x + 1)\cdot(x/N) \\ & + \tfrac{1}{2}(N - x + 1)\cdot(x/N) \\ \approx\ & \ln(2/N\pi)^{1/2} - x^2/N \end{aligned}$$

Damit ist das Endergebnis

$$w_N(x) = \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} \cdot \exp -\frac{x^2}{N}$$

Eine zwar etwas mühevolle, aber doch nicht wirklich schwierige Rechnung.

- Wenn wir den Faktor **0,5** von oben jetzt dazunehmen, erhalten wir

$$w_N(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} \cdot \exp -\frac{x^2}{N} = \left(\frac{1}{2N\pi}\right)^{1/2} \cdot \exp -\frac{x^2}{N}$$

Alles ist richtig. Gehen wir aber zurück zum Ausgangsmodul und setzen das Ergebnis ein, erhalten wir *nicht* die eigentlich erhoffte Gauss Verteilung w_{Gauss} sondern $(2)^{1/2} \cdot w_{Gauss}$. Viele Jahre lang war nicht klar, wo genau etwas schief ging. Die Lösung des Rätsels verdanke ich **Dr. Felix Scheliga** aus Hamburg:

Der "Fehler" steckt in der Näherung $\ln(1 + x/N) \approx x/N$. Sie reicht nicht aus. Man muss zumindest das zweite Glied noch mitnehmen: $\ln(1 \pm x/N) \approx x/N \mp \tfrac{1}{2}(x^2/N^2)$.

- Startet man damit in obiger Formel, sieht der Rechengang so aus:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \ast \left(\mathrm{Ln}\left[1+\frac{x}{N}\right]\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \ast \left(\mathrm{Ln}\left[1-\frac{x}{N}\right]\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{x}{N} - \frac{1}{2} \ast \frac{x^2}{N^2}\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \ast \left(-\frac{x}{N} - \frac{1}{2} \ast \frac{x^2}{N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{2 \ast N \ast x}{2 \ast N^2} - \frac{x^2}{2 \ast N^2}\right) - \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \ast \left(-\frac{2 \ast N \ast x}{2 \ast N^2} - \frac{x^2}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{2 \ast N \ast x - x^2}{2 \ast N^2}\right) + \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{2 \ast N \ast x + x^2}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{N-x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{2 \ast N \ast x + x^2}{2 \ast N^2}\right) - \left(\frac{N+x+1}{2}\right) \ast \left(\frac{2 \ast N \ast x - x^2}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{2 \ast N^2 \ast x + N \ast x^2 - 2 \ast x^2 \ast N - x^3 + 2 \ast N \ast x + x^2}{4 \ast N^2}\right) - \\
& \left(\frac{2 \ast N^2 \ast x - N \ast x^2 + 2 \ast N \ast x^2 - x^3 + 2 \ast N \ast x - x^2}{4 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \\
& \left(\frac{2 \ast N^2 \ast x + N \ast x^2 - 2 \ast x^2 \ast N - x^3 + 2 \ast N \ast x + x^2 - 2 \ast N^2 \ast x + N \ast x^2 - 2 \ast N \ast x^2 + x^3 - 2 \ast N \ast x + x^2}{4 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{+x^2 - x^2 \ast N}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{x^2 \ast (1-N)}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2 \ast (N-1)}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2 \ast N}{2 \ast N^2}\right) \\
= \; & \mathrm{Ln}\left[\left(\frac{2}{\pi \ast N}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left(\frac{x^2}{2 \ast N}\right)
\end{aligned}
$$

- Damit erhält man ein Ergebnis, das beim Einsetzen in die Ursprungsaufgabe die Gauss Verteilung liefert.

$$
\boxed{w_N(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{2N} = \left(\frac{1}{2N\pi}\right)^{1/2} \cdot \exp - \frac{x^2}{2N}}
$$

Aber:

- Wir *starteten* mit einer *diskreten* Funktion **$w_N(x)$**, die nur unter folgenden Bedingungen sinnvolle Werte lieferte:
  - **x**, **N** beide ganzzahlig
  - **N > x > – N; N > 0**
  - **x**, **N** beide gerade oder beide ungerade.
- *Erhalten* haben wir eine *analytische* Funktion die für *jedes* positive **N** und jedes (positive oder negative) **x** einen reellen Wert liefert - ob er sinnvoll ist bleibt noch abzuwarten!

Hier steckt wohl ein Problem. Die diversen Feinheiten der Intepretation sind aber im advanced Modul genauer dargestellt.