Lösungen zur Übung 5.2-1

Illustration

Gleichverteilungssatz in Zahlen

- **1.** Wie schnell bewegen sich bei Raumtemperatur (immer im Mittel) die Luftmoleküle (d.h. Sauerstoff- und Stickstoffmoleküle) im Raum?
- Die Beziehung zwischen innerer Energie und Temperatur ist

$$E = \tfrac{1}{2} \cdot f \cdot kT$$

  - Dabei ist die Zahl der Freiheitsgrade für unsere zweiatomigen Moleküle ***f* = 5**, aber nur **3** davon sind in der Translation enthalten
- Damit gilt:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2}$$

$$v = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{8{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{30 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \; \frac{\mathrm{eV \cdot K}}{\mathrm{K \cdot kg}}\right)^{1/2} = 7{,}17 \cdot 10^{11} \left(\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}$$

  - Raumtemperatur ist wie immer **300 K**, und die Massen von O_2 und N_2 kann man zu **2 · 16 = 32** bzw. **2 · 14 = 28** mal der Masse eine Protons **u = 1,67 · 10^{-27} kg**. Nehme wir also großzügig im Mittel **= 30 u** an.
- Das Ergebnis hat noch ein Problem: Die Dimension **[(eV/kg)$^{1/2}$]** sieht noch nicht so gut aus. Das liegt daran,dass wir die klassische Energieeinheit **[kg · m^2/s^2] = [J]** mit der atomaren Einheit **[eV]** gemischt haben .
  - Wir müssen also **eV** to **J** konvertieren (der Link hilft im Zweifel). Wir haben **1 eV = 1,6 · 10^{-19} J = 1,6 · 10^{-19} kg · $m^2 \cdot s^{-2}$** und erhalten damit

$$v = 7{,}17 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{kg \cdot s^2}}\right)^{1/2} = 286\ \mathrm{m/s}$$

- Jetzt sollten ein paar Glöckchen klingeln: Das ist offenbar die **Schallgeschwindigkeit**!
  - Zufall? Bestimmt nicht! Mal darüber nachdenken.

- **2.** Wie schnell bewegen sich bei Raumtemperatur (immer im Mittel) die freien Elektronen in einem Metall?
- Die Beziehung zwischen innerer Energie und Temperatur ist dieselbe wie in der Aufgabe oben, nur die Masse ist anders. Wir haben

$$v = \left(\frac{3kT}{m_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{8{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \; \frac{\mathrm{eV \cdot K}}{\mathrm{K \cdot kg}}\right)^{1/2} = 5{,}32 \cdot 10^{13} \left(\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}$$

$$= 2{,}13 \cdot 10^{4} \quad \mathrm{m/s}$$

  - Das ist ein *klassisches* Ergebnis, und es sieht so aus, als ob die Elektronen ganz schön schnell im Metall herumsausen. Tun sie aber nicht, denn die so errechnete Geschwindigkeit ist verglichen mit der wahren (mittleren) Geschwindigkeit viel zu langsam.

- Diese Diskrepanz löst erst die Quantentheorie. Der "Fehler", der in obiger Betrachtung steckt, ist dieVerletzung des Pauli Prinzips: Nichts verhindert in unserer Betrachtung, dass zwei Elektronen diesselbe Geschwindigkeit haben könnten, und für "freie" Elektronen wäre das derselbe Zustand. Das darf aber nicht sein.

3. Wie heiß muß ein Wasserstoffgas sein, damit seine Atome im Mittel die Energie **100 keV** haben. Das ist die Energie, die man ungefähr braucht, damit sie die Coulomb Abstoßung überwinden und fusionieren können?

Für die notwendige Temperatur gilt

$$\boxed{T = \frac{2E}{f \cdot k} = \frac{2E_{kin}}{3 \cdot k} = \frac{200 \cdot 10^{3}\,\text{eV} \cdot \text{K}}{3 \cdot 8{,}6 \cdot 10^{-5}\,\text{eV}} = 7{,}75 \cdot 10^{8}\,\text{K}}$$

- So kommt man zwanglos zu den rund und roh **100** Millionen ^{o}**C**, die man für die Kernfusion braucht (und bis jetzt noch nicht so richtig hat).