

# Vektorrechnung

In diesem Modul werden nur einige grundsätzliche Bemerkungen gemacht und die wichtigsten Formeln der **Vektorrechnung** zusammengestellt.

Wer nicht bereits halbwegs mit der Vektorrechnung vertraut ist, tut gut daran, ganz schnell entsprechende Mathe- oder Physikbücher zu konsultieren.

Wir symbolisieren Vektoren in diesem Modul immer durch Unterstriche

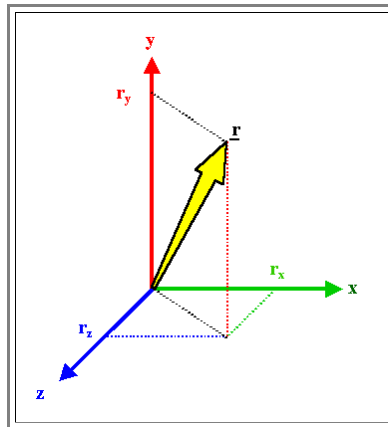
## Basics

### Was sind Vektoren?

Es ist gar nicht so einfach, außerhalb der "reinen" Mathematik zu definieren was *genau* ein Vektor ist. Es ist aber auch nicht so furchtbar wichtig, da es für den "Normalgebrauch" fast immer klar genug ist.

Für unsere Zwecke ist ein Vektor ein *physikalisches Objekt*, d.h. eine real existierende Größe wie die Geschwindigkeit, die elektrische Feldstärke oder eine Kraft, die *immer* beschrieben werden muß durch einen Betrag *und* eine Richtung.

- Ein Vektor kann damit durch einen Pfeil repräsentiert werden, dessen Länge dem Betrag entspricht und dessen Richtung eindeutig durch die Pfeilspitze gegeben ist.
- In einem willkürlich gewählten Koordinatensystem (zur Einfachheit mit Ursprung am Pfeilende) kann jeder Vektor dann durch seine drei **Komponenten** (den Projektionen auf die Achsen) eindeutig beschrieben werden.



Damit erschließen sich sofort die wesentlichsten Eigenschaften, die zwar in der folgenden Auzählung etwas redundant sind, aber damit auch mehr Klarheit schaffen.

1. Zwei Vektoren sind *gleich*, falls sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

Eine einfache Aussage, aber mit "Tiefgang". Da eine Parallelverschiebung im Raum den "Pfeil" *nicht* ändert, sind zwei Vektoren *auch dann noch gleich*, wenn sie irgendwo im Koordinatensystem zu finden sind. Das hat eine sofortige Konsequenz:

Durch Pfeile repräsentierbare physikalische Größen, bei denen eine Verschiebung des Pfeils eine *unterschiedliche* Situation ergibt, sind dann *keine* Vektoren im strengen Sinn!

Ein Beispiel dazu: Eine Kraft  $\underline{F}$ , die auf einen *Massenpunkt*  $\mathbf{P}$  wirkt, ist ein Vektor - denn es ist egal, wo genau im Raum sie auf  $\mathbf{P}$  wirkt, es geschieht immer dasselbe.

Eine Kraft  $\underline{F}$ , die auf einen *Hebelarm* wirkt, ist *kein* Vektor in voller Strenge, denn was geschieht ist vom *Drehmoment* = Kraft mal Hebelarm abhängig; eine Verschiebung von  $\underline{F}$  produziert eine neue Situation.

2. Vektoren werden *addiert* indem man (in cartesischen **KO**-Systemen) ihre Komponenten addiert (dabei beginnen die Vektoren immer im **0**-Punkt des **KO**-Systems, wir dürfen sie ja beliebig verschieben).

Mit

$$\underline{F}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\underline{F}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

folgt

$$\underline{F}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Umgesetzt auf physikalische Größen begrenzt diese Definition wiederum die Vielfalt der möglichen Vektoren. In Worten sagt das Additionsprinzip:

Kommt man von einem gegebenen physikalische Zustand zu einem anderen, indem man erst entlang des Vektors  $\underline{r}_1$  läuft, und anschließend entlang des Vektors  $\underline{r}_2$ , so ist der dann erreichte Zustand identisch zu dem Zustand den man erreicht wenn man gleich vom Ausgangszustand entlang dem Vektor  $\underline{r}_3 = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$  läuft.

Das ist am besten zu verstehen, indem man sich anschaut für welche "Pfeile" dies gilt und für welche es *nicht* gilt.

Die Aussage gilt sicherlich für Ortsvektoren, aber auch z.B. für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen oder Feldstärken.

Sie gilt aber beispielsweise *nicht* für Pfeile die Drehungen symbolisieren indem man den "Drehpfeil" in die Drehachse legt und sein Länge proportional zum Drehwinkel macht. Zum Beispiel produziert eine Drehung um  $90^\circ$  um die  $x$ -Achse, gefolgt von einer Drehung um  $90^\circ$  um die  $y$ -Achse, einen ganz anderen Zustand als *eine* Drehung um die "Summenachse" (mal in Gedanken für ein schleuderndes Auto probieren!).

3. Vektoren sind *invariant* gegenüber einer Koordinatentransformation.

Das muß so sein - schließlich kann die Beschreibung einer physikalische Größe nicht davon abhängen, wie wir ein Koordinatensystem wählen. Ist der Pfeil einmal definiert, wird er immer gleich bleiben, egal, wie wir das **KO**-System aufspannen.

Das gilt aber nur für den Pfeil "an sich" - den *Vektor* - nicht für die *Zahlenwerte* seiner Komponenten. Diese sind notgedrungen immer auf das **KO**-System bezogen.

Damit sind die **Transformationseigenschaften** der Komponenten eines Vektors festgelegt. Hat der Vektor im  $x$ - $y$ - $z$  **KO**-System die Komponenten  $(x_1, y_1, z_1)$ , müssen sich die Zahlenwerte  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  in irgendeinem neuen System  $x'$ - $y'$ - $z'$  in eindeutiger und definierter Weise aus der Transformationsvorschrift (= Transformationsmatrix) errechnen lassen, die das neue System produziert.

Ein wichtiger Punkt am Rande: Die Aussage, daß ein Vektor beim Wechsel des Koordinatensystems unverändert bleibt, gilt zwar *auch* bei einem Wechsel von cartesischen zu nicht-cartesischen Systemen, beispielsweise beim Übergang von  $x$ - $y$ - $z$  Koordinaten zu Polarkoordinaten - *aber das gilt nicht immer für die Rechenvorschriften*. Zwei Vektoren in Polarkoordinaten werden *nicht* addiert, indem man ihre Komponenten addiert - mal ausprobieren!

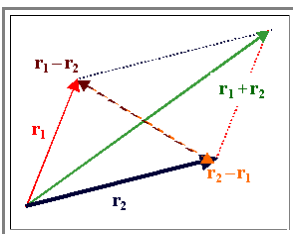
Das reicht eigentlich schon. Denn daraus folgt die wesentliche Nutzung: *Vektorgleichungen sind unabhängig von Koordinatensystem* - und damit läßt sich das Leben erheblich vereinfachen!

$\underline{F} = \underline{m} \cdot \underline{a}$  gilt in jedem System: cartesisch, polar, krumm - es ist egal.

### Rechnen mit Vektoren

Im folgenden werden nur noch die wichtigsten Formeln als Gedächtnisstütze gegeben - eine gewisse Vertrautheit mit Vektorrechnung wird vorausgesetzt.

Die **Addition und Subtraktion von Vektoren** ist klar - graphisch erhalten wir die Diagonalen im Vektorparallelogramm.



Numerisch addieren oder subtrahieren wir, wie *oben* schon ausgeführt, indem wir die Komponenten addieren oder subtrahieren - aber bitte *nur in cartesianischen KO-Systemen!*

Addition und Subtraktion sind kommutativ und assoziativ:

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$$

$$= \underline{y} + (\underline{x} + \underline{z})$$

- Daß man in anderen **KO**-Systemen aufpassen muß wird sofort klar, wenn wir z.B den Vektor  $\underline{u} = (r, \phi)$ , gegeben durch die Komponenten  $r$  und  $\phi$  in Polarkoordinaten, zu sich selbst addieren, d.h. schlicht seine Länge verdoppeln. Die Addition der Komponenten gibt offenbar etwas falsches!

**Skalarprodukt und Vektorprodukt**

➤ Nach der Addition und Subtraktion, ist die Verknüpfung der Multiplikation zu behandeln. Dies kann man bei Vektoren auf *zwei* sinnvolle Arten tun: **Skalarprodukt** und **Vektorprodukt**.

➤ Das **Skalarprodukt** verknüpft zwei Vektoren zu einem Skalar. Das Skalarprodukt **S** zweier Vektoren **A** und **B** ist wie folgt definiert

$$S = \underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \cos(\underline{A}, \underline{B}) = A \cdot B \cdot \cos(\underline{A}, \underline{B})$$

- Mit  $(\underline{A}, \underline{B})$  = Winkel zwischen **A** und **B**
- Skalarprodukte sind kommutativ und distributiv:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$$

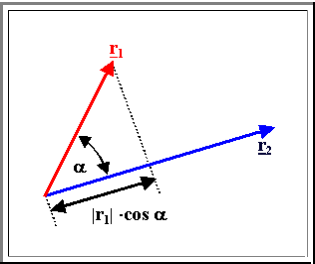
$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D} + \dots) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{A} \cdot \underline{D} + \dots$$

- In cartesischen **KO**-Systemen erhält man das Skalarprodukt durch die Summation der Produkte gleichartiger Komponenten, d.h.

$$S = \underline{A} \cdot \underline{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

- Man erkennt ansatzweise die Eleganz der Vektorrechnung: Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinanderstehen, ist immer = **0** - egal welchen numerischen Wert die Komponenten in irgendeinem Koordinatensystem haben.

➤ Das Skalarprodukt kann man leicht interpretieren



- Da  $|\underline{A}| \cdot \cos(\underline{A}, \underline{B})$  gleich der Projektion des Vektors **A** auf die Richtung von **B** ist (und umgekehrt), ist das skalare Produkt identisch zu der Länge des einen Vektors multipliziert mit der *projizierten* Länge des anderen.
- Das Skalarprodukt hat eine herausragende Eigenschaft: Im Vergleich zu "normalen" Produkten - d.h. dem Produkt zweier Skalare - kann es auch dann = **0** sein, wenn beide "Faktoren" ungleich Null sind.

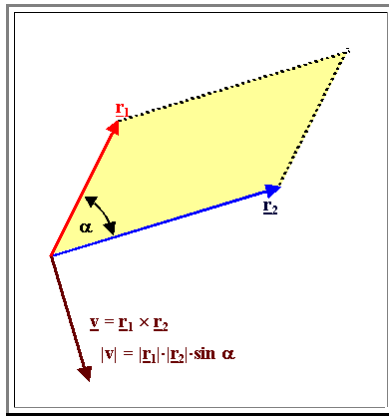
- Das Skalarprodukt kann man auch nutzen, um den Betrag eines Vektors einfach zu berechnen. Dazu bilden wir einfach das Skalarprodukt des Vektors **A** mit sich selbst und erhalten

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = A_x \cdot a_x + A_y \cdot B_a + A_z \cdot a_z = A^2$$

oder

$$A = |\underline{A}| = (A^2)^{1/2}$$

➤ Das **Vektorprodukt** verknüpft zwei Vektoren zu einem neuen Vektor. Das Vektorprodukt **V** zweier Vektoren **A** und **B** ist wie folgt definiert:



- 1  $\underline{V}$  steht senkrecht auf der von  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  aufgespannten Ebene.
- 2. Für den Betrag gilt

$$|\underline{V}| = V = S = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \sin(\underline{A}, \underline{B})$$

$$= A \cdot B \cdot \sin(\underline{A}, \underline{B})$$

- Mit  $(\underline{A}, \underline{B}) =$  Winkel zwischen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$
- 3. Die Richtung von  $\underline{V}$  wird durch eine "rechte Handregel" gegeben. Im Klartext: Daumen und Zeigefinger der rechten Hand bilden einen rechten Winkel. Der Zeigefinger repräsentiert den Vektor  $\underline{A}$ ; er wird in Richtung  $\underline{B}$  gedreht so daß die Handfläche zeigt auf  $\underline{B}$ . Der Daumen zeigt dann in Richtung von  $\underline{V}$ . Anders ausgedrückt: In Richtung von  $\underline{V}$  blickend, muß die im Uhrzeigersinn erfolgende Drehung von  $\underline{A}$  auf  $\underline{B}$  den kleinstmöglichen Winkel überdecken.

- Die wesentlichen Eigenschaften sind

$$\underline{V} = \underline{A} \times \underline{B}$$

$$= -\underline{B} \times \underline{A}$$

- d.h. das Vektorprodukt ist *nicht* mehr *kommutativ*. Es ist aber immer noch *distributiv*, d.h.

$$\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D} + \dots) = \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C} + \underline{A} \times \underline{D} + \dots$$

- Damit gilt auch

$$a \cdot \underline{A} \times \underline{B} = a \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{A} \times a \cdot \underline{B}$$

- Die Komponenten von  $\underline{V}$  errechnen sich in *cartesischen KO-Systemen* wie folgt

$$V_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y$$

$$V_y = A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z$$

$$V_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$$

- Das kann man auch als Determinante schreiben:

$$\underline{V} = \underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

● Mit  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$  = Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen.

▶ Das Vektorprodukt hat einige wichtige direkt interpretierbare Eigenschaften:

- Falls  $\underline{A} \times \underline{B} = \underline{0}$ , müssen die beiden Vektoren parallel sein. Insbesondere ist  $\underline{A} \times \underline{A} = \underline{0}$ .
- Die Fläche des von den Vektoren  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag von  $\underline{A} \times \underline{B}$ .

### Mehrfachprodukte

▶ *Produkt eines Vektors mit dem Skalarprodukt zweier anderer Vektoren*

- Multiplizieren wir den Vektor  $\underline{A}$  mit dem Skalarprodukt  $\underline{B} \cdot \underline{C}$  zweier anderer Vektoren, ändern wir einfach die Länge von  $\underline{A}$ .
- Es gilt

$$\underline{A}' = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

● Aufpassen muß man nur, weil wir *zwei* verschiedene Multiplikationen haben, insbesondere ist

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \neq (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$$

▶ *Skalarprodukt eines Vektors mit dem Vektorprodukt zweier anderer Vektoren*

- Wir erhalten einen Skalar, der auch **Spatprodukt** genannt wird. Der resultierende Skalar ergibt das Volumen des von den drei Vektoren gebildeten Parallelepipeds.

$$V = \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C})$$

● Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) &= + \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A}) \\ &= + \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) \\ &= - \underline{A} \cdot (\underline{C} \times \underline{B}) \\ &= - \underline{B} \cdot (\underline{A} \times \underline{C}) \\ &= - \underline{C} \cdot (\underline{B} \times \underline{A}) \end{aligned}$$

- Eine etwas trickreiche Vorzeichensache, die man wiederum viel eleganter in Determinantenform ausdrücken kann:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$