

Rechnen mit komplexen Zahlen

Einführung

Basics

- In der **klassischen Physik**, aber auch in der Elektrotechnik oder Materialwissenschaft, wird oft mit **komplexen Zahlen** gerechnet, obwohl alle berechneten (und letztlich auch immer meßbaren) Größen immer **reell** sind.
 - Es gibt in der **klassischen Physik** keine **imaginären** Energien, Orte, Zeiten, Spannungen, Ströme usw.! Die Einführung komplexer Größen dient **nur** der Bequemlichkeit beim Rechnen. Im Endergebnis treten nur reelle Zahlen auf - im Zweifel nimmt man vom Ergebnis nur den Realteil oder den Imaginärteil.
- In der Quantenmechanik ist das anders.** Die konventionellen **meßbaren Größen**, die zwar letztlich immer als Endergebnis erscheinen, sind zwar auch **immer reell**, aber die **Wellenfunktion** selbst, manchmal auch die **Zeit**, ist oft eine **intrinsisch komplexe Zahl**.
 - Das ist schwer zu akzeptieren, aber das waren die irrationalen Zahlen auch. **Pythagoras** ließ einen seiner Schüler, der behauptete, daß es irrationale Zahlen **wirklich** gäbe, sogar hinrichten (heute ist es viel ungefährlicher, seinem Professor zu widersprechen).
- Obwohl komplexe Zahlen oft mit dem berühmten Mathematiker **Gauss** assoziiert werden, ist ihre Geschichte etwas älter. Insbesondere war Gerolama **Cardano** von großer Bedeutung . Er ist heute fast schon vergessen, seine Biographie aber ist so interessant, daß es sich lohnt sie kurz darzustellen.
- Diese Seite wird die wesentlichsten Grundlagen der komplexen Zahlen und ihre Nützlichkeit bei einigen Fragestellungen der klassischen Physik wiederholen. Die wichtigsten Stichworte dazu sind
 - Definition und Eigenschaften komplexer Zahlen; Gaußsche Zahlenebene.**
 - Eulersche Beziehung.**
 - Einfache Beispiele zur Nützlichkeit der komplexen Zahlen.**
 - Ausblick auf komplexe Funktionen.**
- Weiterführende Informationen finden Sie auch in einem reinen [Mathematik-Skript](#)

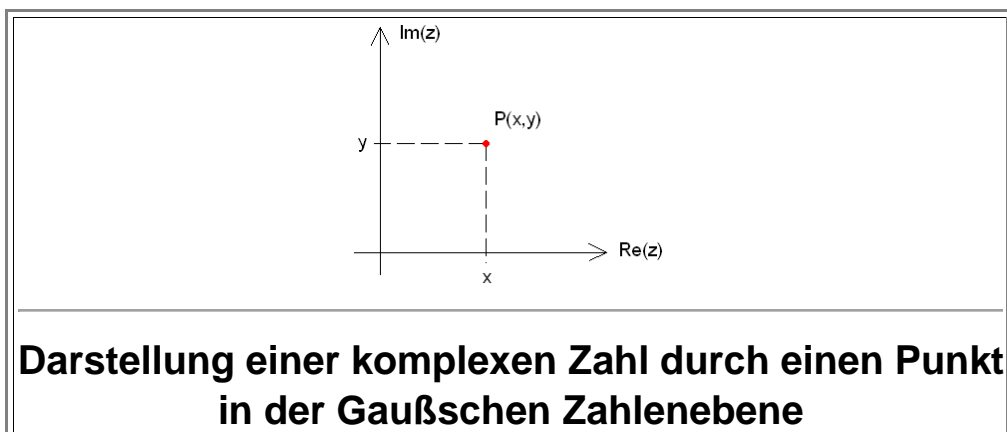
Definition und Eigenschaften komplexer Zahlen

Real- und Imaginärteil

- Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $z = x + iy$ wobei x und y reelle Zahlen sind. Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlenmenge dar.
- Die imaginäre Einheit i genügt der Gleichung $i^2 = -1$. Daher gilt für die imaginäre Einheit $i = (-1)^{1/2}$.
- Ist $z = x + iy$, so ist $\text{Re}(z) = x$ der **Realteil** und $\text{Im}(z) = y$ der **Imaginärteil** der komplexen Zahl z .
- Achtung:** Nicht iy ist der Imaginärteil der komplexen Zahl z , sondern nur die **reelle** Zahl y .

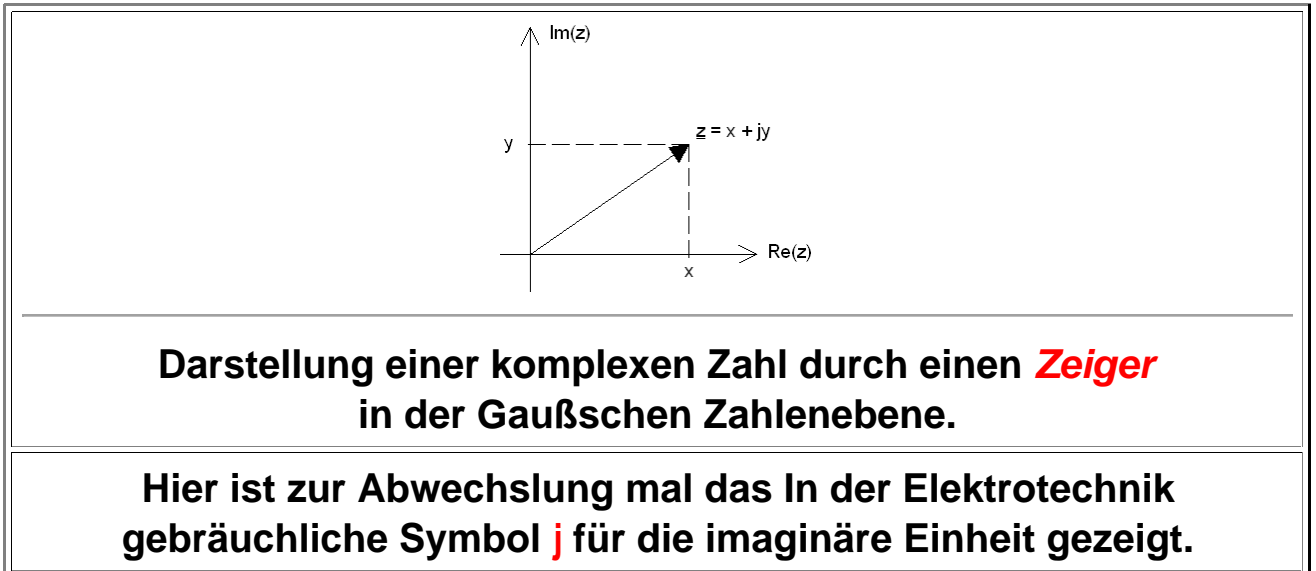
Zahlenebene

- Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ läßt sich in der **Gaußschen Zahlenebene** durch einen Punkt **P** darstellen. Hierzu faßt man den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + iy$ als **kartesische Koordinaten** des Punktes **P** in der x,y -Ebene auf.



- In den Anwendungen werden komplexe Zahlen meist durch sog. **Zeiger** dargestellt. Dabei handelt es sich um einen **Pfeil**, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Bildpunkt **P(z)** gerichtet ist.

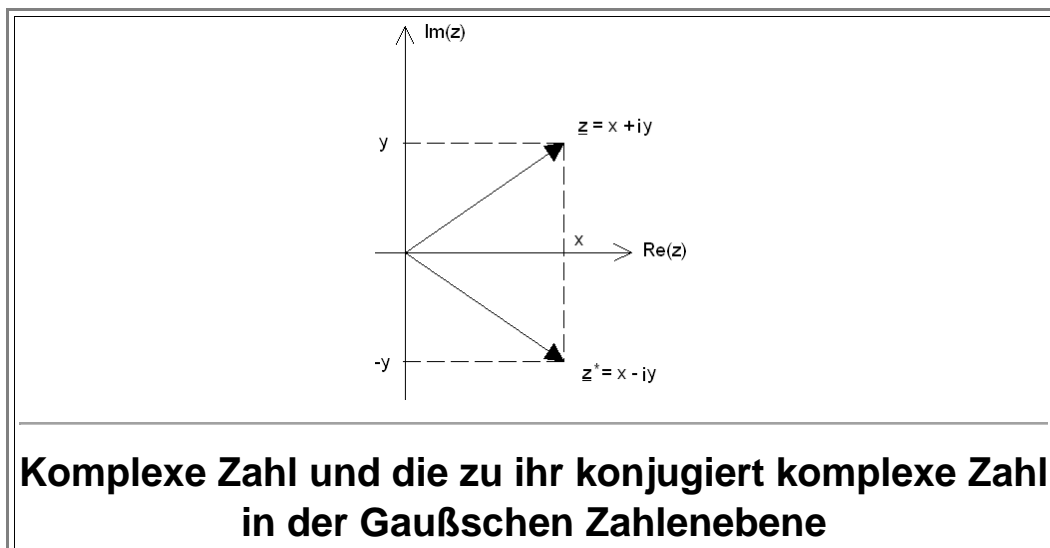
- **Zeiger** werden oft durch Unterstreichen gekennzeichnet: $\underline{z} = x + iy$. Das führt aber zur Verwechslungsgefahr mit Vektoren, die zumindest in HTML auch durch unterstreichen dargestellt werden - und Zeiger sind zwar Pfeile, aber keine Vektoren!



- **Achtung:** Der Zeiger \underline{z} ist eine geometrische Darstellung der komplexen Zahl z und nicht mit einem *Vektor* zu verwechseln!

Konjugiert komplexe Zahlen; Betrag oder Modulus

- Die komplexe Zahl $z^* = x - iy$ ist die zu $z = x + iy$ *konjugiert* komplexe Zahl.
- Die zu einer komplexen Zahl konjugiert komplexe Zahl erhält man durch einen *Vorzeichenwechsel im Imaginärteil* von z , während der Realteil unverändert bleibt:
- $\text{Re}(z^*) = \text{Re}(z)$ und $\text{Im}(z^*) = -\text{Im}(z)$
- Die Entstehung der konjugiert komplexen Zahl z^* lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene durch *Spiegelung* der komplexen Zahl z an der reellen Achse veranschaulichen.



- Unter dem **Betrag** $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + iy$ versteht man die *Länge des zugehörigen Zeigers* in der Gaußschen Zahlenebene:

$$|z| = \left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}$$

- Statt *Betrag* sagt man auch *Absolutbetrag* oder *Modul*.

Eulersche Beziehung

Die Eulersche Beziehung ist eine der wichtigsten und merkwürdigsten Gleichungen der Mathematik. Sie verkoppelt 5 der wichtigsten Zahlen die es gibt, nämlich **0**, **1**, **i**, π und **e**! Mehr darüber findet sich in spannender Form in den [Feynman Lectures](#). Wir brauchen sie für alternative Darstellungen komplexer Zahlen.

- Die Form $z = x + iy$ bezeichnet man als **Gaußsche** oder **kartesische Darstellung** einer komplexen Zahl. Daneben existieren noch zwei weitere Darstellungsformen: die **trigonometrische Form** und die **Eulersche Form**.
- In der **trigonometrischen Form** wird eine komplexe Zahl über ihre **Polarkoordinaten** r und φ festgelegt:

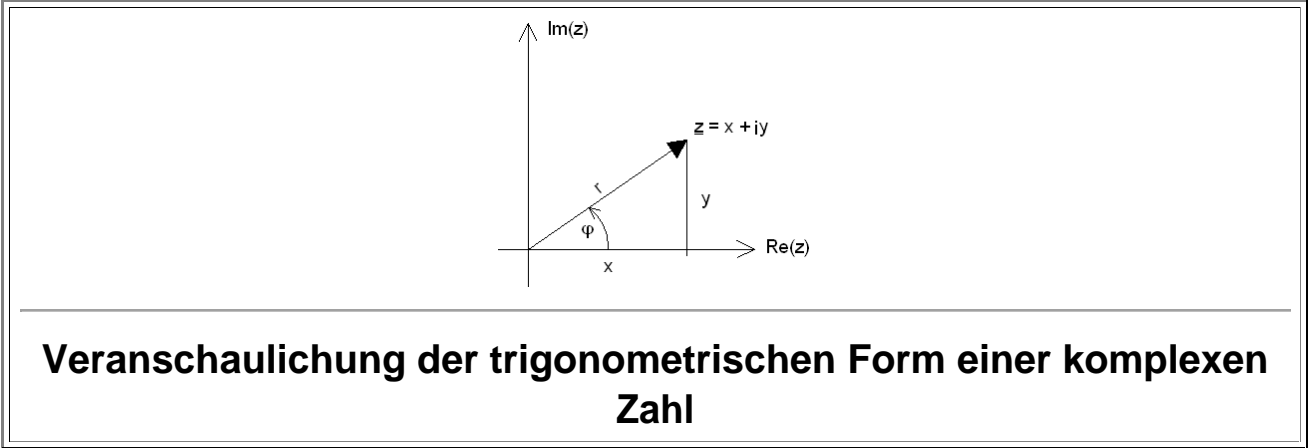
$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

- Mit $r \in [0, \infty]$, $\varphi \in [\pi, -\pi]$
- Hierbei gilt:

$$r = \text{Betrag von } z$$

$$\varphi = \text{Argument, Winkel oder Phase von } z$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ kann man eine komplexe Zahl aus der kartesischen Form in die trigonometrische Form überführen.



- Der Übergang von der komplexen Zahl z zu der konjugiert komplexen Zahl z^* entspricht in der trigonometrischen Darstellung einem Vorzeichenwechsel im Argument φ während der Betrag der komplexen Zahl konstant bleibt:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$z^* = r \cdot (\cos -\varphi + i \cdot \sin -\varphi)$$

$$= r \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$$

- Verwendet man die von **Euler** stammende Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

- so erhält man aus der trigonometrischen Form die **Eulersche Form einer komplexen Zahl**:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

- Diese Schreibweise einer komplexen Zahl ist besonders vorteilhaft beim Ausführen von Multiplikationen und Divisionen.
- Die zu $z = r \cdot e^{i\varphi}$ gehörende konjugiert komplexe Zahl z^* lautet in Eulerscher Form

$$z^* = [r \cdot e^{i\varphi}]^* = r \cdot e^{-i\varphi}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

von komplexen Zahlen in verschiedenen Darstellungsformen:

Addition und **Subtraktion** komplexer Zahlen in kartesischer Form:

- Komplexe Zahlen können *nur* in kartesischer Form addiert/subtrahiert werden. Dies geschieht indem man ihre Realteile addiert/subtrahiert *und* ihre Imaginärteile addiert/subtrahiert.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$$

Multiplikation, Division und Potenzen komplexer Zahlen

Multiplikation in *kartesischer Form*

Es gelten die üblichen Multiplikationsregeln für Klammerausdrücke; danach muß nach Real- und Imaginärteil sortiert werden:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Multiplikation in *trigonometrischer Form*

- Für die Ausführung von Multiplikationen erweist sich die trigonometrische Form oft als vorteilhafter als die kartesischer Form. Die sture Durchmultiplikation ergibt zunächst

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \\ &= (r_1 \cdot r_2) \cdot [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))] \end{aligned}$$

- Dies läßt sich zusammenfassen zu einem klaren Bildungsgesetz :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= z = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \\ &= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division komplexer Zahlen in *kartesischer Form*: Mühsam, aber klar.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

- **Division** komplexer Zahlen in *trigonometrischer Form* ist einfach und elegant.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))] \\ &= \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

Potenzen und Wurzeln einer komplexen Zahl.

- Wendet man die Potenzgesetze auf $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an, so erhält man die **Moivre-Formel**, welche angibt, wie man die **n-te** Potenz einer komplexen Zahl berechnet:

$$z^n = r^n \cdot e^{i n \cdot \varphi} = r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \sin n \cdot \varphi)$$

- Aus der Moivre-Formel lässt sich außerdem eine Formel zum Berechnen der **n-ten Wurzel** einer komplexen Zahl herleiten. z hat genau **n** verschiedene **n-te** Wurzeln w_0 bis w_{n-1} , die folgender Gleichung genügen

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$
$$k = 0 \dots n - 1$$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl.

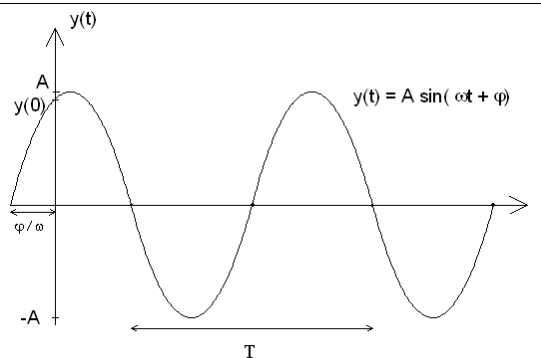
- Um den natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl berechnen zu können, ist es von Vorteil von der (erweiterten) Exponentialform $z = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2k \cdot \pi)}$ der komplexen Zahl auszugehen, also eine "Phase" einzubauen. Daraus folgt

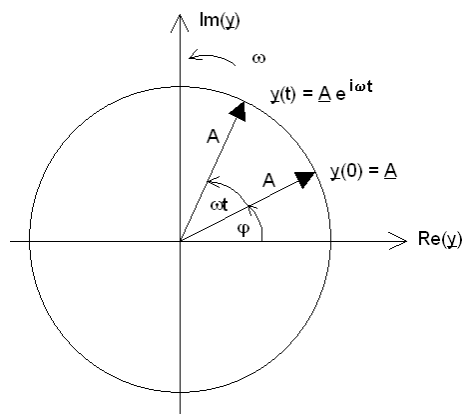
$$\ln z = \ln [r \cdot e^{i(\varphi + 2k \cdot \pi)}]$$
$$= \ln r + \ln e^{i(\varphi + 2k \cdot \pi)}$$
$$= \ln r + i \cdot (\varphi + 2k \cdot \pi)$$

Beispiele zur Nützlichkeit komplexer Zahlen

Zunächst brauchen wir die **Darstellung sinusförmiger Schwingungen mit Hilfe komplexer Zeiger**

- $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt eine sich mit der Zeit sinusförmig verändernde Größe (Schwingung).
- Dabei ist **A** die Schwingungsamplitude, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und φ die Phase oder der Nullphasenwinkel.
- Die harmonische Schwingung $y(t)$ lässt sich durch einen komplexen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Der komplexe Zeiger besitzt die Länge **A** und rotiert im mathematisch positiven Drehsinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung des Koordinatensystems.





Darstellung eines harmonischen Schwingers durch einen rotierenden Zeiger

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ schließt der Zeiger y mit der Bezugsachse (positive reelle Achse) den Nullphasenwinkel φ ein.
- In der Zeit t überstreicht der Zeiger den Winkel ωt . Die Lage des Winkels in der Gaußschen Zahlenebene läßt sich durch die zeitabhängige komplexe Zahl darstellen:

$$\begin{aligned}
 y &= A \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + i \cdot \sin(\omega t + \varphi)] \\
 &= A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \\
 &= \underline{A} \cdot e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

- Dabei ist

$\underline{A} = A \cdot e^{i\varphi}$	komplexe Amplitude (zeitunabhängig)
$e^{i\omega t}$	Zeitfunktion

- Die komplexe Amplitude \underline{A} ist zeitunabhängig; sie hat den Betrag $|\underline{A}| = A$ und den Phasenwinkel φ , welcher den Anfangswinkel des Zeigers festlegt.
- Die Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ beschreibt die Rotation des Zeigers mit der Winkelgeschwindigkeit ω .
- Der Imaginärteil des rotierenden Zeigers y entspricht dem *Momentanwert* der Sinusschwingung $y(t)$ und damit der Projektion des Zeigers auf die Imaginärachse zum Zeitpunkt t .

$$y(t) = \text{Im}[\underline{A} \cdot e^{i\omega t}] = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Die *Überlagerung zweier gleichfrequenter Sinusschwingungen in komplexer Darstellung* zeigt nun wie praktisch diese Betrachtungsweise ist:

- Gegeben sind zwei Schwingungen gleicher Frequenz aber verschiedener Phase

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\
 y_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)
 \end{aligned}$$

- Die ungestörte Überlagerung dieser Schwingungen ergibt nach dem Superpositionsprinzip eine Schwingung y gleicher Frequenz, aber mit zunächst unklarer Amplitude und Phase, d.h. $y = y_1 + y_2 = A_? \cdot \sin(\omega t + ?)$.
- Man kann das natürlich mit den trigonometrischen Funktionen ausführen, aber die Amplitude A und die Phase φ der resultierenden Schwingung berechnet man weit einfacher in komplexer Schreibweise als mit \sin und \cos Funktionen - insbesondere wenn wir mehr als zwei Schwingungen überlagern.
- Dazu stellt man die Schwingungen y_1 und y_2 durch komplexe Zeiger dar:

$$y_1 \rightarrow \underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{i\omega t}$$

$$y_2 \rightarrow \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{i\omega t}$$

- Für die komplexen Schwingungsamplituden \underline{A}_1 und \underline{A}_2 gilt:

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

- Anschließend überlagert man die komplexen Einzelschwingungen \underline{y}_1 und \underline{y}_2 durch schlichte *Addition*. Es folgt für \underline{y} :

$$\underline{y} = \underline{A}_1 \cdot e^{i\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{i\omega t}$$

$$= (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{i\omega t}$$

$$= \underline{A} \cdot e^{i\omega t}$$

- Für die resultierende komplexe Amplitude gilt daher

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$$

- Die gesuchte *Schwingung* (der zeitabhängige Teil) y entspricht dem Imaginärteil der berechneten komplexen Schwingung \underline{y} . Daher gilt:

$$y = \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}(\underline{A} \cdot e^{i\omega t})$$

$$= A \cdot \sin(\omega t).$$

Das war eine einfache Überlagerung zweier Schwingungen. Es ist einleuchtend, daß bei komplizierteren Problemen die komplexe Darstellung enorme Vorteile hat.

Schwingkreise in der Elektrotechnik

- In der Wechselstromtechnik geht man von sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen aus. Daher ist es möglich, Strom und Spannung als komplexe Zeiger in der Gaußschen Ebene zu betrachten

$$\underline{u} = 2^{1/2} \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = 2^{1/2} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$$

- Den Quotienten aus der komplexen Spannung \underline{u} und dem komplexen Strom \underline{i} (*Achtung! Hier ist, wie in der Elektrotechnik üblich $i = \text{Strom und } j = (-1)^{1/2}$*) bezeichnet man als **Impedanz** oder **Scheinwiderstand** \underline{Z}

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + j \cdot X$$

- Für einen (ohmschen) Widerstand R gilt: $\underline{u} = R \cdot \underline{i}$. Daher besitzt ein ohmscher Widerstand die *reelle* Impedanz $\underline{Z}_R = R$.
- Für eine **Kapazität** C gilt der folgende Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$\underline{i} = C \cdot \frac{d\underline{u}}{dt}$$

- Damit erhält man für die **Impedanz der Kapazität C** folgenden Wert

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

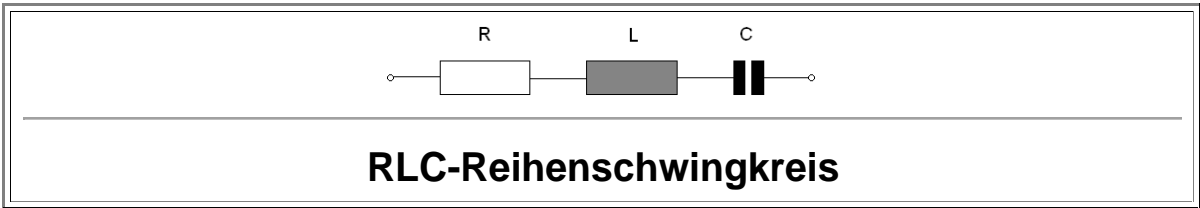
- Aus dem Induktionsgesetz erhält man folgenden Zusammenhang zwischen **u** und **i** für eine **Induktivität L**.

$$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt}$$

- Daraus ergibt sich folgende **rein imaginäre** Impedanz **Z_L** für die Induktivität

$$\underline{Z}_L = j \cdot \omega \cdot L$$

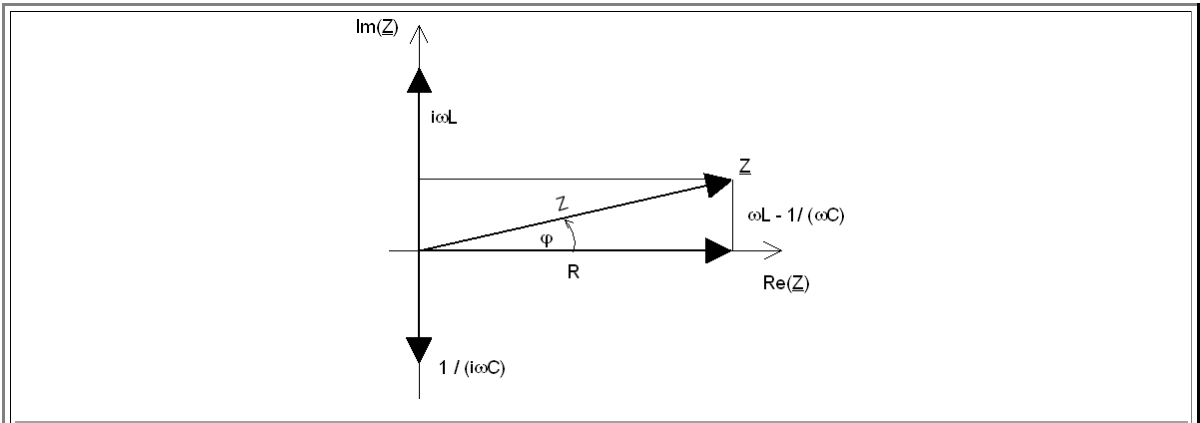
- Mit Hilfe dieser Impedanzen lassen sich Wechselstromkreise **einfach** berechnen. Dazu betrachten wir als Beispiel folgenden Reihenschwingkreis aus einem Widerstand **R**, einer Induktivität **L** und einer Kapazität **C**:



- Nach den Kirchhoffschen Regeln erhält man die Gesamtimpedanz **Z** des Wechselstromkreises durch **Addition der Impedanzen** der drei Bauteile

$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$$

- Die folgende Abbildung zeigt die Lage der **Gesamtimpedanz Z** im Zeigerdiagramm, die sich aus der **graphischen Addition der einzelnen Zeiger** ergibt:



Zeigerdiagramm des Wechselstromkreises in Reihenschaltung

- Der **Wirkwiderstand** der Reihenschaltung ist der **Realteil** der Impedanz **Z**; **Re (Z) = R**.
- Der **Blindwiderstand** der Reihenschaltung ist der Imaginärteil der Impedanz **Z**; **Im (Z) = ωL - 1/ωC**.

- Der reelle **Scheinwiderstand** Z ist der Betrag des komplexen Vektors \underline{Z} .
Die Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen Spannung und Strom läßt sich berechnen zu

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \left(\frac{\omega \cdot L - 1/\omega C}{R} \right)$$

- Das Verhältnis von Z_L zu Z_C bestimmt die Größe von φ und damit ob der Strom der Spannung nacheilt, ob die Spannung dem Strom nacheilt oder ob im Resonanzfall Strom und Spannung in Phase sind.

Ausblick auf komplexe Funktionen

- Hat man erst mal komplexe Zahlen mit all ihren Darstellungsarten und Rechenregeln, lassen sich natürlich jetzt auch **Funktionen mit komplexen Variablen** definieren.

- Damit ist ein großes und (auch für die Materialwissenschaft) sehr wichtiges Gebiet der Mathematik definiert, die **Funktionentheorie**.
- Es ergeben sich völlig neue und wunderbare Beziehungen, eine davon wollen wir uns mal genauer anschauen. Dazu betrachten wir die Lösungen der **Poisson Gleichung**, der Grundgleichung der Elektrostatik, die uns in der Halbleitertechnik laufend begegnen wird.

- Die **Poisson-Gleichung** der Elektrostatik lautet:

$$\Delta \Phi(x, y, z) = - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon \epsilon_0}$$

- Mit $\Delta =$ Delta operator ($\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), $\Phi(x, y, z) =$ elektrostatisches Potential, $\rho(x, y, z) =$ Ladungsverteilung im Raum
- In **zwei** Dimensionen ist die Poissongleichung ein Spezialfall eines allgemeinen Typs von Differentialgleichungen der sehr häufig vorkommt: der **Laplace Gleichung**

$$\Delta \Phi = 0$$

ausgeschrieben

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

- immer unter der Bedingung, daß Φ die spezifischen Randbedingungen erfüllt, auf irgendeiner Oberfläche konstant zu sein. Elektrostatisch heißt das z.B. einfach nur, daß die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche sein muß. Die Laplace - Gleichung ist damit eine typische Grundgleichung für viele **Randwertprobleme**.
- Es gibt keinen einfachen Weg um die Laplace - Gleichung (zusammen mit der spezifischen Randbedingung) zu lösen. Analytisch klappt es nur für relativ einfache Oberflächen.
- Jetzt betrachten wir mal eine **beliebige** komplexe Funktion $f(z)$ mit der komplexen Variablen $z = x + iy$ (und i ist wieder die imaginäre Einheit).
- Zum Beispiel

$$f(z) = z^2$$

$$f(z) = z \cdot \lg z$$

$$f(z) = \text{was immer einem einfällt}$$

- Für das erste Beispiel haben wir **ausgeschrieben**

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ix \cdot y$$

- Setzen wir eine komplexe Zahl mit dem Wertepaar (x, y) ein, erhalten wir als Funktionswert eine neue komplexe Zahl.

▸ $f(z)$ lässt sich also auch *immer* schreiben als

$$f(z) = U(x, y) + i \cdot V(x, y)$$

- d.h. analog zur Darstellung der komplexen Zahl als Summe aus einer Funktion U die von *zwei reellen* Variablen x, y abhängt *plus* i mal eine andere Funktion V , die ebenfalls von den reellen Variablen x, y abhängt.

▸ Das ist natürlich verallgemeinerbar: *Alle* komplexen Funktionen lassen sich so darstellen!

- Wir können also eine beliebige uns bekannte oder auch nur schreibbare Funktion $f(x)$ nehmen, statt x die komplexe Zahl z substitutionieren, und - nach kürzerer oder länglicher Rechnung - damit *zwei reelle Funktionen generieren*: $U(x, y)$ und $V(x, y)$.
- Und nun zum Überraschungseffekt:

● *Jede dieser unendlich vielen Funktionen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ ist eine Lösung der Laplace Gleichung!*

- Wir wissen nur nicht, zu welchem konkreten Randwertproblem!

▸ Den Beweis für diese Behauptung überlassen wir der Mathematik. Es sollte aber klar geworden sein, daß Funktionen komplexer Variablen für Überraschungen gut sind.

- Leicht verrückt: Wir kennen die Antwort - aber nicht die Frage! Wer das Kultbuch (so in den neunziger Jahren) "**The Hitchhikers Guide to the Galaxy**" von Douglas **Adams** (der in diesem Jahr (**2001**) gestorben ist) gelesen hat, wird sich jetzt fragen, ob Adams die Funktionentheorie kannte, denn das Buch (genauer gesagt alle **4** Bücher der Trilogie(?)) dreht sich genau um diese Frage:
- Die Antwort zu den letzten Fragen bezüglich des Leben, des Universums und überhaupt und so, ist bekannt; sie lautet: **42**. Nur die genaue Frage ist offen.