

Spin

Vorbemerkung

Advanced

Was ist der Spin eines **Elementarteilchens**?

- Einerseits ist der Spin eine abstrakte "elementare" Eigenschaft jenseits der unmittelbaren Wahrnehmung oder Vorstellung, andererseits aber hat er offensichtlich auch etwas mit ganz "irdischen" Dingen wie Drehimpuls oder magnetischem Moment zu tun.
- Zehn Sekunden oder so darf man jetzt mal kurz innehalten und darüber nachdenken, was genau eine physikalische Größe oder Eigenschaft "anschaulich" "irdisch" oder "gewöhnlich" macht.
1 - 2 - 3 - 4 -
- Genau! *Einerseits* ist es das was unsere (extrem beschränkten) Sinne uns direkt vermitteln. Dazu haben wir dann eine unmittelbare Beziehung, die direkt in die "Wertung" des jeweiligen Phänomens einfließt.
- "*Licht*", zum Beispiel, kennt jeder und hat deshalb keine Angst davor. Nicht direkt wahrnehmbare *elektromagnetische Wellen*, wie die Mikro- und Radiowellen, sind schon viel abstrakter. Deshalb fürchten "wir" uns auch nicht vor einer **1000 W** Glühbirne auf einem Lichtmast, wohl aber vor einem **100 W** Mikrowellensender, der wie jeder weiß ungesunden **Elektrosmog** erzeugt.
- *Andererseits* sind "anschauliche" physikalische Größen einfach alles, an das wir uns im Laufe der Zeit auch ohne direkte Wahrnehmung gewöhnt haben. Was genau ist eigentlich *Ladung*? Aha!

Was also *ist* der Spin?

- Was immer der Spin auch ist, auf **1 - 2** Seiten läßt es sich nicht sauber und geschlossen darstellen. Wir beschränken uns im folgenden deshalb auf einige Schlüsselbegriffe, etwas unsystematisch und anekdotisch dargestellt, die noch mit Links zu etwas mehr fortgeschritten Seiten zu diesem oder jenem Unterpunkt versehen sind.

Drehimpuls und magnetisches Moment

Mutter Natur ist gelegentlich launisch (ob sie wohl deswegen allgemein als weiblich empfunden wird?) Sie hat zwar eine elektrische Ladung "gemacht", die dann ein elektrisches Feld produziert, aber aus (immer noch) unerfindlichen Gründen keine magnetische Ladung - es gibt offenbar keine "magnetischen Monopole". Man hat jedenfalls bisher keine gefunden - trotz langer, sehr teurer und noch nicht abgeschlossener Suche.

- Magnetfelder haben ihre makroskopischen Quellen deshalb immer im elektrischem *Strom* - d.h. in (elementaren) Ladungen, die sich irgendwie *bewegen*.
- Besonders übersichtlich ist die Lage, wenn der elektrische Strom im Kreis herum fließt - typischerweise in einem zu einem Kreis gebogenen Leiter oder eben in den vielen Kreisen der klassischen "Induktivität", vulgo Spule genannt.

Das im Bohrschen Atommodell auf einer Kreisbahn um den Atomkern rennende Elektron erfüllt die obigen Kriterien aber auch - wir können es als einen im Kreis fließend Strom I betrachten, und es *muß* deshalb ein Magnetfeld produzieren, es kann nicht anders.

- Das war sowohl Bohr als auch seinen Zeitgenossen klar. Damit hat jedes "Bohrsche" Elektron unvermeidlich auch ein "magnetisches Moment" $\underline{\mu}$, einfach definiert als polarer Vektor

$$\underline{\mu} = I \cdot \underline{A} = - \frac{e}{2m_e} \cdot \underline{D}$$

- Mit $A = \pi r^2$ = Fläche des zur Kreisbahn gehörenden Kreises; m_e = Ruhmasse des Elektrons, $\underline{D} = n \cdot \hbar$ der ([nach Bohr gequantelte](#)) Drehimpuls. Wie man auf diese Beziehung kommt (es ist ganz einfach) kann man im [Link](#) nachlesen.

Setzt man den kleinstmöglichen erlaubten Drehimpuls ein (= \hbar), erhält man das kleinstmögliche magnetische Moment eines "kreisenden" Elektrons.

- Dieses minimale magnetische Moment hat einen eigenen Namen, es heißt "**Bohrsches Magneton μ_{Bohr}** " und ist für den Magnetismus sowas wie die Elementarladung für die Elektrizität. Wir haben

$$\mu_{\text{Bohr}} = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

➤ Nun müssen sich drei Fragen aufdrängen:

- 1. Wie ist das in der "richtigen" Quantenmechanik? Das Bohrsche Modell war ja nur ein Zwischenschritt auf dem Weg zur "richtigen" Beschreibung des Elektrons mit Wellenfunktion - und dann ist es aus mit anschaulichen Strömen und Kreisflächen!
- 2. So denn das im Atom wie auch immer herumeiernde Elektron tatsächlich ein magnetisches Moment haben sollte: Was sagt das Experiment? Wie kann man es messen?
- 3. Was hat das alles mit dem Spin zu tun?

Experimentelle Zwänge und Einführung des Spins

➤ Die 1. Frage ist schnell beantwortet:

- Auch in der "richtigen" durch die Schrödingergleichung beschriebenen Quantentheorie, haben die im Atom steckenden Elektronen magnetische Momente (die allerdings auch mal = 0 sein können). Und sie haben auch einen Bahndrehimpuls, der wiederum mit dem magnetischen *Bahn* moment verkoppelt ist. Es ist quantisiert, und tritt in "Quanten" auf, die durch Nebenquantenzahl **l** und magnetische Quantenzahl **m** (in etwas trickreicher Weise) gegeben sind.
- Die Nebenquantenzahl definiert die erlaubten Eigendrehimpulswerte zu einem durch die Hauptquantenzahl gegebenen Grundzustand, und die magnetische Quantenzahl bestimmt, wieviele Möglichkeiten der Anordnung der jeweilige Drehimpuls in einem Magnetfeld hat. Für **l = 2** gibt es beispielsweise 5 Möglichkeiten für **m**.

➤ Nun zur Frage 2. und 3.

- Ja, man kann das magnetischen Bahnmoment messen - indem man schaut, was die Elektronen des Atoms so "tun", wenn man sie in ein externes Magnetfeld bringt. Diesbezügliche Messungen, die dazu schon früh durchgeführt wurden, führen dann ganz schnell zum *Spin* - und damit zur Antwort auf die 3. Frage.

➤ Das Ergebnis der Messungen war: Magnetisches "Bahnmoment" und einige der Messungen dazu passen einfach nicht zusammen - und das auch schon bevor es die Schrödingergleichung gab, nämlich im Rahmen des von **Sommerfeld** erweiterten Bohrschen Modells (das wie bei den Planeten auch Ellipsenbahnen zuließ).

- Im Sommerfeldschen Modell kommt eine *zweite* Quantenzahl zum Einsatz, **Bahndrehimpulsquantenzahl l** genannt, die die möglichen "Ellipsenbahnen" zu jeder Bohrschen Quantenzahl n (jetzt *Hauptquantenzahl* heißen) beschreibt (und im wesentlichen das war, was wir jetzt Nebenquantenzahl nennen).
- Das magnetische Moment im Sommerfeldschen Modell war an die Bahndrehimpulsquantenzahl **l** gekoppelt, nicht an **n**. Das bleibt in übrigen auch so in der "korrekten" Theorie, die aus der Schrödingergleichung mit Magnetfeld folgt (wobei dann auch noch, wie man zu Recht vermuten wird, die "magnetische Quantenzahl" **m** mitwirkt).

➤ Dumm war nur schon ganz früh, daß man experimentell auch dann ein magnetisches Moment finden konnte, wenn eigentlich gar keines da sein sollte weil **l = 0** war. Das Stichwort dazu ist: "**Stern-Gerlach-Experiment**".

- Es gab noch andere Ungereimtheiten in dieser Richtung, und das war besonders ärgerlich, weil in vielen anderen Experimenten alles prima den Erwartungen entsprach. Aber *ein* unwiderlegbares experimentelles Ergebnis reicht halt aus, um ein ganzes Theoriegebäude zu Fall zu bringen (natürlich nur in Naturwissenschaft und Technik und keinesfalls in anderen Sparten, z.B Theologie).
- Die Experimente waren nur zu verstehen, wenn man *postulierte*, daß die gemessenen magnetischen Momente der Elektronen in Atomen zwar von den "Bahndrehimpulsen" herrühren konnten, aber auch noch von einem davon gänzlich unabhängigen Effekt, nämlich von einem **Eigendrehimpuls** des Elektrons, und damit verbunden einem **magnetischen Moment** des Elektrons *an sich*.
- Oder vielleicht auch umgekehrt: Ein "eigenmagnetisches Moment" des Elektrons, und damit verbunden ein Eigendrehimpuls? Was ist Henne, was ist Ei?

➤ Wie auch immer, das war das Postulat, **1925** von **Uhlenbeck** und **Goudsmith** aufgestellt, das nicht nur alle damals offenen Rätsel löste, sondern sehr viel weiter trug - es ist halt einfach die Wahrheit!

- Man kann das sauber mathematisch darstellen: Wir bezeichnen den *Eigendrehimpuls* mit **S**; er ist selbstverständlich ein (polarer) Vektor. Wir haben dann folgende Gleichungen:

$$|\underline{S}| = \left(s \cdot (s + 1) \right)^{1/2} \cdot \hbar$$

s = Spinquantenzahl des Teilchens

$$s_{\text{Elektron}} = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{\text{Elektron}} = g_e \cdot \frac{e}{2m_e} \cdot \underline{S}$$

$$g_e = 2,00231928$$

- Die Formulierungen sind bewusst allgemein gehalten, sie gelten für *alle* Elementarteilchen. Der jeweilige **Spin** wird charakterisiert durch die Spinquantenzahl **s** (die auch = **0** sein kann) und das **gyromagnetische Verhältnis g** (das natürlich für (ruh)masselose Teilchen nicht definiert ist).
- Der große Unterschied zum magnetischen Moment aus dem Bahndrehimpuls ist nur, daß es nur *einen* Wert für die Spinquantenzahl gibt, eben **s_{Elektron} = 1/2**. Das führt dann auf genau *zwei* Möglichkeiten der Einstellung des Spins: "Rauf" oder "runter" - entsprechend der zwei Werte der Wurzel in obiger Gleichung.
- Erst an dieser Stelle kommen die immer angeführten *zwei* Elektronen pro Zustand ins Spiel.

Das gyromagnetische Verhältnis **g_e** ist nun stark problematisch:

- Zunächst ist es keine ganze Zahl, wie man eigentlich erwarten sollte, sondern ein klein bißchen, aber doch signifikant, von **2** verschieden. Warum - das war eine gute, heftig nobelpreisträchtige Frage, die dann erst in der **Quantenelektrodynamik** gelöst wurde.
- Aber auch ein Wert = **2** ist im klassischen Analogon nicht zu erklären. Ein im Kreis laufendes geladenes klassisches Teilchen würde ein magnetisches Moment mit **g = 1** produzieren - auch wenn das "im Kreis laufen" nur eine Drehung um die eigene Achse bedeutet.

Jetzt müßte es klingeln. Wie soll man sich ein Elektron vorstellen, das sich um die eigene Achse dreht?

- Als homogene Kugel mit Radius **r_{Elektron}** und einer Ladung **- e**, die - ja was eigentlich? Homogen in der Kugel verteilt ist? Homogen über die Oberfläche geschmiert ist? Als ein mathematischer Punkt irgendwo in oder auf der Kugel sitzt? Mehrere Punkte mit entsprechend kleinerer Ladung irgendwie verteilt? Vielleicht ist das Elektron auch gar keine Kugel, sondern ein Tetraeder oder ein Donut?
- Was immer man sich vorstellen kann (und man kann sicher sein, daß irgendjemand das bereit ausgerechnet hat) - *es funktioniert nicht*. Falls man irgendeine Konfiguration findet, die bei der Beziehung zwischen Eigendrehimpuls und magnetischem Moment in die richtige Richtung geht, wird mit Sicherheit etwas anderes schiefliegen (z.B. die Energie unendlich werden).
- Es gilt ein ähnlicher Erhaltungssatz wie bei Autoreisen mit einer Schar kleiner Kinder (Eines kotzt immer). In jeder denkbaren Konfiguration steckt immer irgendwo ein tödliches Problem.

Also sind wir gezwungen, den Spin als eine Elementareigenschaft zu betrachten, der sich eben *nach außen* in der Form eines Eigendrehimpulses und/oder eines magnetischen Momentes äußert.

- Aber so wie wir alle hoffen mehr zu sein als das was man von außen sieht, ist auch der Spin mehr als seine äußeren Erscheinungsformen. Das wird klar, wenn man das *Photon* betrachtet: es hat einen Spin **s = 1**, kein magnetisches Moment (wg. **m = 0**), und was ein mechanischer Drehimpuls dann bedeutet, ist zumindest unklar.

Dirac Gleichung und extreme Abstraktion

Die Schrödingergleichung war *nicht* mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar. An sich war das kein Problem, denn prinzipiell war klar, wie man vorgehen mußte, um die entsprechenden Erweiterungen vorzunehmen.

- Bei den entsprechenden Rechnungen lief man jedoch sofort und mit voller Wucht in einer Sackgasse gegen die Wand: Schon nach den ersten Zeilen kommt folgende Formel hoch:

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-c^2 \cdot \hbar^2 \cdot \Delta + m_0^2 \cdot c^4 \right)^{1/2} \cdot \psi$$

- Δ ist der Deltaoperator ($\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), **m₀** die *Ruhemasse* des betrachteten Teilchens, **c** die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Nun können wir uns zwar vorstellen, wie man den Deltaoperator auf irgendeine Funktion anwendet, aber nicht so recht wie man das mit der *Wurzel* aus einem Operator tut.

- Den damaligen Physikern und Mathematikern ging es auch nicht besser. Ohne eine *neue* Sache kommt man nicht weiter. Es war dann **Dirac** um **1928**, der die richtige Idee hatte, die dann auch funktionierte:
- Man kann die Wurzel für zwei Spezialfälle umgehen: Entweder der Impuls des Teilchens ist = **0** und wir haben Lösung **[1]**, oder die Ruhmasse ist = **0** und wir haben Lösung **[2]**. Machen wir doch einfach den Ansatz, daß die Lösung **[AII]** für den allgemeinen Fall aus einer Überlagerungen dieser beiden Spezialfälle besteht, also symbolisch geschrieben:

$$[AII] = \alpha \cdot [1] + \beta \cdot [2]$$

- So weit so gut, aber man sieht sehr schnell, daß sich Bedingungen für α und β ergeben, die sich einfach nicht erfüllen lassen, außer --
- ---*außer*, α und β sind keine (reellen oder komplexe) *Zahlen*, sondern **Matrizen**!!!!

Hier begegnet uns in Reinkultur (mal wieder, aber bisher haben wir es nicht gemerkt) das wohl tiefste Rätsel des Universums: Warum ist die Mathematik so unglaublich gut geeignet, das Universum zu beschreiben? Denn für die relativistisch korrekte Beschreibung der Wellenfunktion braucht man schlicht und ergreifend Matrizen; es geht nicht anders, und es wird durch die Mathematik regelrecht erzwungen.

- Löst man dann die jetzt erhaltene **Dirac-Gleichung** für ein simples Elektron, das weiter gar nichts tut, erhält man **4** mögliche Lösungen, davon zwei mit *negativer* Energie und zwei mit positiver Energie, getrennt durch eine *Energielücke* von genau **$2m_0 \cdot c^2$** .

In dieser, aus der Einführung von Matrizen stammenden Lösungsmannigfaltigkeit, verbergen sich zwei neue, extrem fremdartige, aber trotzdem reale Eigenschaften der Wellenfunktion eines schlichten Elektrons (oder Protons, oder):

1. Es hat eine eingebaute Eigenschaft, die zu jeder der beiden Energiewerte *zwei* Zustände generiert - das ist der *Spin*, der dann auch genauso herauskommt, wie man es (experimentell) schon kannte.
2. Zu jedem Elektron (oder jedem anderen Elementarteilchen) gibt es ein **Antiteilchen**. Das ist aber *nicht* das Teilchen mit der negativen Energie. Denn es kann keine unmittelbare Symmetrie zwischen den Zuständen mit positiver und negativer Energie geben.
- Denn damit unser Universum (mit *positiver* Energie) nicht sofort kollabiert, weil alle Teilchen sich auf ein günstigeres, weil energetisch tieferes *negatives* Niveau begeben, müssen wir fordern, daß *alle* Zustände bei negativer Energie mit Teilchen besetzt sind. Damit nehmen wir sie gar nicht wahr - sie bilden den unsichtbaren Hintergrund eines absoluten Vakuums.
- Nur wenn eines der "Negativenergieteilchen" durch ausreichende Energiezufuhr auf einen Zustand mit positiver Energie befördert wird, können wir neben dem "aus dem Nichts" entstandenen Teilchen den jetzt leeren Platz im unendlichen See der negativen Zustände als *Antiteilchen* wahrnehmen.

Und wieder mal gilt: *Fact is stranger than fiction* - kein Romanautor, "science fiction eingeschlossen - hätte sich sowas auch nur träumen lassen!